

PROVA ADICIONAL DE ANÁLISE DE ALGORITMOS
BCC, 1o. SEMESTRE DE 2006

Instruções:

1. A prova pode ser feita a lápis. Cuidado com a legibilidade.
 2. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho.
 3. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de soluções.
 4. Asserções imprecisas valem pouco. Justifique suas asserções (dentro do razoável!).
1. Considere o algoritmo de “busca ternária” dado abaixo, que procura um elemento x no vetor ordenado $v[1..n]$.

Algoritmo Busca Ternária(x, v, n)

1. $\ell \leftarrow 1; r \leftarrow n$
2. enquanto $\ell \leq r$ faça
3. $p \leftarrow \lfloor (2\ell + r)/3 \rfloor; q \leftarrow \lceil (\ell + 2r)/3 \rceil$
4. se $x = v[p]$ então devolva p
5. se $x = v[q]$ então devolva q
6. se $x < v[p]$ então $r \leftarrow p - 1$
7. senão se $x > v[q]$ então $\ell \leftarrow q + 1$
8. senão $\ell \leftarrow p + 1; r \leftarrow q - 1$
9. devolva -1

(i) [0.5 ponto] Sejam

$$e(n) = \left\lfloor \frac{2+n}{3} \right\rfloor - 1, \quad m(n) = \left\lceil \frac{1+2n}{3} \right\rceil - \left\lfloor \frac{2+n}{3} \right\rfloor - 1, \quad e \quad d(n) = n - \left\lceil \frac{1+2n}{3} \right\rceil. \quad (1)$$

Prove que temos $e(n) \leq n/3$, $m(n) \leq n/3$, e $d(n) \leq n/3$ para todo n . [Sugestão. Se você tiver alguma dificuldade em provar isso diretamente, faça uma tabela com os valores de $e(n)$, $m(n)$, e $d(n)$. A partir de sua tabela, você até conseguirá uma fórmula fechada para essas funções. Esta fórmula pode ser expressa de forma fácil se você escrever n na forma $3k + i$, com $k \in \{1, 2, \dots\}$ e $i \in \{-1, 0, 1\}$.]

(ii) [0.5 ponto] Seja $f(n)$ o número máximo de vezes que o passo 3 do algoritmo acima é executado quando procuramos um elemento x que *não* ocorre no vetor $v[1..n]$. Prove que

$$f(1) = 1 \quad e \quad f(n) \leq f(\lfloor n/3 \rfloor) + 1 \text{ para } n > 1. \quad (2)$$

(iii) [0.5 ponto] Prove que

$$f(n) \leq \log_3 n + 1 \quad (3)$$

para todo $n \geq 1$.