# Análise de Algoritmos

## Slides de Paulo Feofiloff

**[com erros do coelho e agora também da cris]**

# Complexidade computacional

Classifica os problemas em relação à dificuldade de resolvê-los algoritmicamente.

CLR 36 ou CLRS 34

# Palavras

Para resolver um problema usando um computador é necessário descrever os dados do problema através de uma seqüência de símbolos retirados de algum alfabeto.

Este alfabeto pode ser, por exemplo, o conjunto de símbolos ASCII ou o conjunto $\{0, 1\}$.

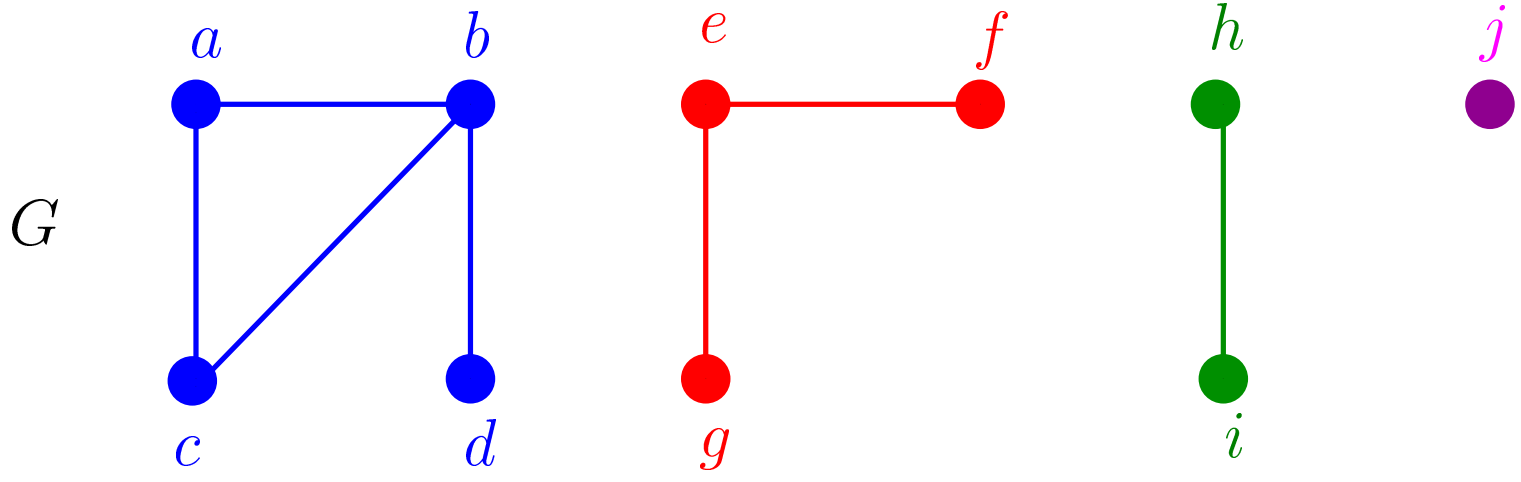
Qualquer seqüência dos elementos de um alfabeto é chamada de uma palavra.

Não é difícil codificar objetos tais como racionais, vetores, matrizes, grafos e funções como palavras.

O tamanho de uma palavra $w$, denotado por $\langle w \rangle$, é o número de símbolos usados em $w$, contando multiplicidades. O tamanho do racional '$123/567$' é 7.

# Exemplo 1

Grafo



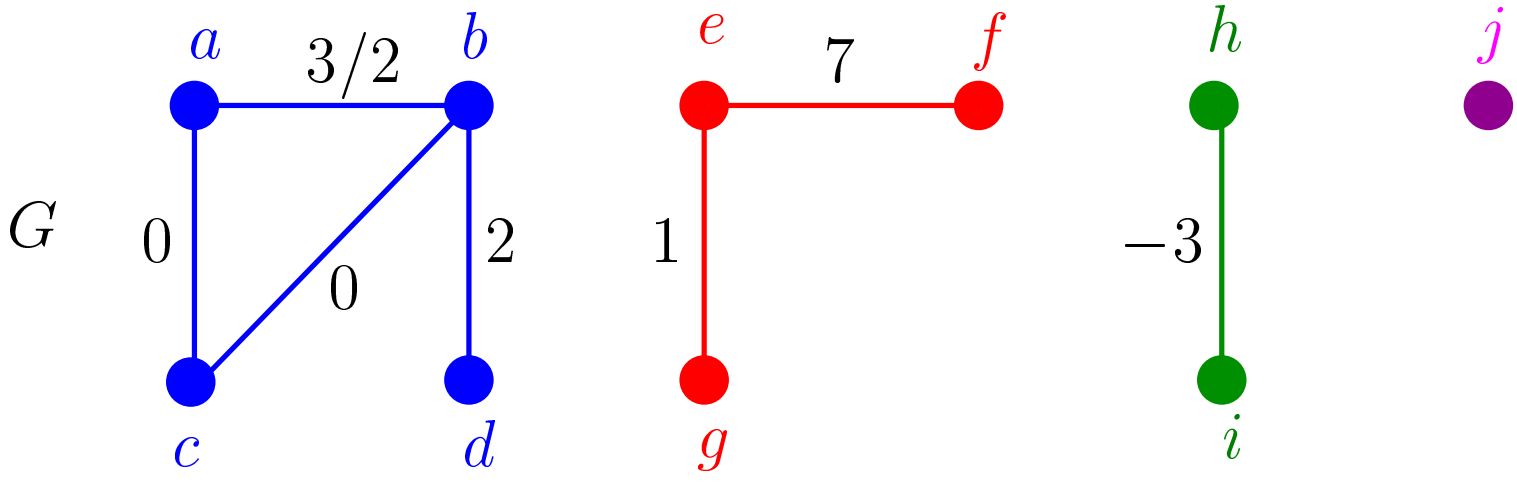

Palavra:

$(\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, \{\{bd\}, \{eg\}, \{ac\}, \{hi\}, \{ab\}, \{ef\}, \{bc\}\})$

Tamanho da palavra: 59

# Exemplo 2

Função




Palavra:

$$((\{bd\},2),(\{eg\},1),(\{ac\},0),(\{hi\},-3),(\{ab\},3/2),(\{ef\},7),(\{bc,0)\}$$

Tamanho da palavra: 67

# Tamanho de uma palavra

Não é necessário contar rigorosamente os caracteres ‘{’, ‘}’, ‘(’, ‘)’ e ‘,’ dos exemplos anteriores.

Tamanho de um inteiro $p$ é essencialmente $\lg |p|$.

Tamanho do racional $p/q$ é, essencialmente, $\lg |p| + \lg |q|$.

Tamanho de um vetor $A[1\,..\,n]$ é a soma dos tamanhos de seus componentes

$$\langle A \rangle = \langle A[1] \rangle + \langle A[2] \rangle + \cdots + \langle A[n] \rangle.$$

# Problemas e instâncias

Cada conjunto específico de dados de um problema define uma instância.

Tamanho de uma instância é o tamanho de uma palavra que representa a instância.

Problema que pede uma resposta do tipo SIM ou NÃO é chamado de problema de decisão.

Problema que procura um elemento em um conjunto é um problema de busca.

Problema que procura um elemento de um conjunto de soluções viáveis que seja melhor possível em relação a algum critério é um problema de otimização

# Máximo divisor comum

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos $a$ e $b$, determinar mdc$(a, b)$. [CLRS Cap. 31]

Exemplo:
máximo divisor comum de $30$ e $24$ é $6$
máximo divisor comum de $514229$ e $317811$ é $1$
máximo divisor comum de $3267$ e $2893$ é $11$

Problema de busca

Instância: $a$ e $b$

Tamanho da instância: $\langle a \rangle + \langle b \rangle$, essencialmente

$$\lg a + \lg b$$

Consumo de tempo do algoritmo Café-Com-Leite é $\Omega(b)$.
Consumo de tempo do algoritmo EUCLIDES é $\mathrm{O}((\lg b)(\lg a)^2)$.

# Máximo divisor comum (decisão)

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos $a$, $b$ e $k$, mdc$(a, b) = k$?

Exemplo:
máximo divisor comum de $30$ e $24$ é $6$
máximo divisor comum de $514229$ e $317811$ é $1$
máximo divisor comum de $3267$ e $2893$ é $11$

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: $a$, $b$, $k$

Tamanho da instância: $\langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle k \rangle$, essencialmente

$$\lg a + \lg b + \lg k$$

# Subseqüência comum máxima

Problema: Encontrar uma ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

Exemplos: $X$ = A B C B D A B

$Y$ = B D C A B A

ssco máxima = B C A B

Problema de otimização

Instância: $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$

Tamanho da instância: $\langle X\rangle + \langle Y\rangle$, essencialmente

$$n + m$$

Consumo de tempo REC-LCS-LENGTH é $\Omega\left(\binom{m+n}{m}\right)$.

Consumo de tempo LCS-LENGTH é $\Theta(mn)$.

# Subseqüência comum máxima (decisão)

Problema: $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$ possuem uma ssco máxima $\geq k$?

Exemplo: $X$ = A B C B D A B

$Y$ = B D C A B A

ssco máxima = B C A B

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: $X[1\,..\,m]$, $Y[1\,..\,n]$, $k$

Tamanho da instância: $\langle X\rangle + \langle Y\rangle + \langle k\rangle$, essencialmente

$$n + m + \lg k$$

# Problema booleano da mochila

Problema (Knapsack Problem): Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$, encontrar uma mochila boolena ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

valor $= 1000$

Problema de otimização

Instância: $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$

Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

Consumo de tempo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

# Problema booleano da mochila (decisão)

Problema (Knapsack Problem): Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$ e $k$, existeuma mochila boolena de valor $\geq k$.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$, $k = 1010$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

valor $= 1000$

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$, $W$ e $k$

Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle + \lg k$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W + \lg k$

# Problema fracionário da mochila

Problema: Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$, encontrar uma mochila ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 1 | 1/3 | 0 | 0 |

valor $= 1040$

Problema de otimização

Instância: $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$

Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

Consumo de tempo MOCHILA-FRACIONÁRIA é $\Theta(n \lg n)$.

# Problema fracionário da mochila (decisão

Problema: Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[\,..\,n]$, $W$ e $k$, existe uma mochila de valor $\geq k$?

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$, $k = 1010$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 1 | 1/3 | 0 | 0 |

valor $= 1040$

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$

Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

# Modelo de computação

É uma descrição abstrata e conceitual de um computador que será usado para executar um algoritmo.

Um modelo de computação especifica as operações elementares um algoritmo pode executar e o critério empregado para medir a quantidade de tempo que cada operação consome.

Operações elementares típicas são operações aritméticas entre números e comparações.

No critério uniforme supõe-se que cada operação elementar consome uma quantidade de tempo constante.

# Problemas polinomiais

Análise de um algoritmo em um determinado modelo de computação estima o seu consumo de tempo e quantidade de espaço como uma função do tamanho da instância do problema.

Exemplo: o consumo de tempo do algoritmo EUCLIDES $(a, b)$ é expresso como uma função de $\langle a \rangle + \langle b \rangle$.

Um problema é solúvel em tempo polinomial se existe um algoritmo que consome tempo $\mathrm{O}(\langle I \rangle^c)$ para resolver o problema, onde $c$ é uma constante e $I$ é instância do problema.

# Exemplos

- Máximo divisor comum

  Tamanho da instância: $\lg a + \lg b$

  Consumo de tempo Café-Com-Leite é $\Omega(b)$ (não-polinomial)

  Consumo de tempo EUCLIDES é $\mathrm{O}((\lg b)^3)$ (polinomial)

- Subseqüência comum máxima

  Tamanho da instância: $n + m$

  Consumo de tempo REC-LCS-LENGTH é $\Omega\left(\binom{m+n}{m}\right)$

  (exponencial, se, digamos, $m = n$: $\binom{2m}{m} \geq 4^m/(2m+1)$)

  Consumo de tempo LCS-LENGTH é $\Theta(mn)$ (polinomial).

# Mais exemplos

- Problema booleano da mochila

  Tamanho da instância: $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$
  Consumo de tempo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$
  (não-polinomial)

- Problema fracionário da mochila
  Tamanho da instância: $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$
  Consumo de tempo MOCHILA-FRACIONÁRIA é
  $\Theta(n \lg n)$ (polinomial).

- Ordenação de inteiros $A[1\,..\,n]$

  Tamanho da instância: $n \lg M$,
  $M := \max\{|A[1]|, |A[2]|, \ldots, |A[n]|\} + 1$

  Consumo de tempo MERGE-SORT é $\Theta(n \lg n)$
  (polinomial).

# Classe P

Por um algoritmo eficiente entendemos um algoritmo polinomial.

A classe de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais é denotada por P (classe de complexidade).

Exemplo: As versões de decisão dos problemas:

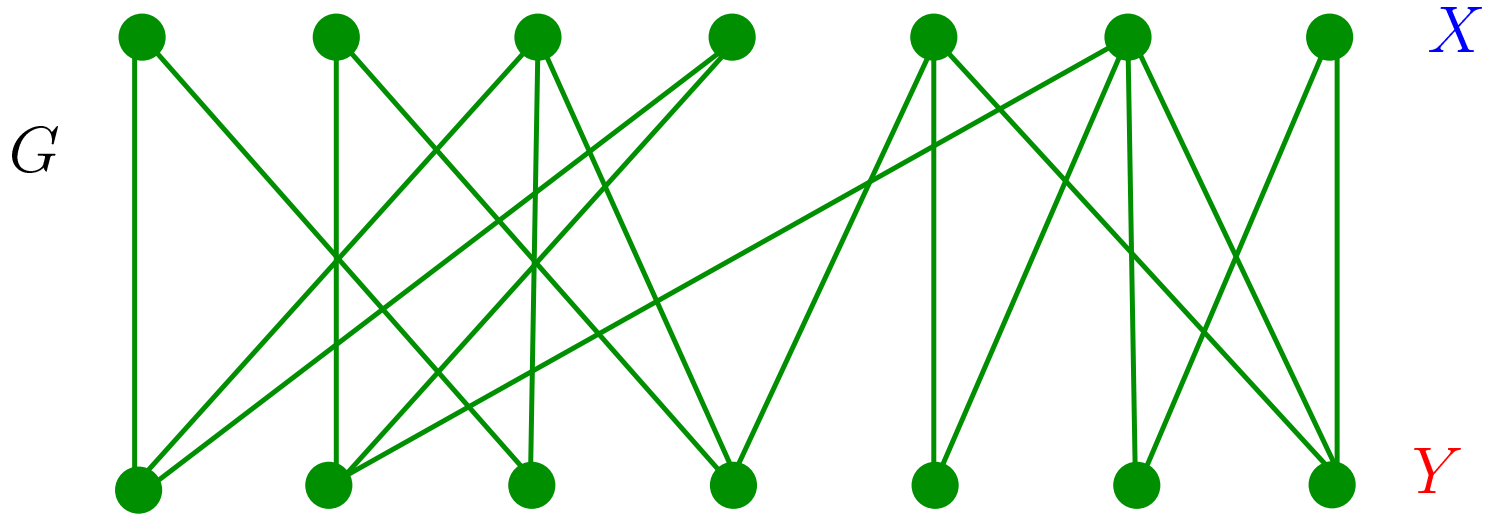
> máximo divisor comum, subseqüência comum máxima e mochila fracionária

estão em P.

Para muitos problemas, não se conhece algoritmo essencialmente melhor que “testar todas as possibilidades”. Em geral, isso não está em P.

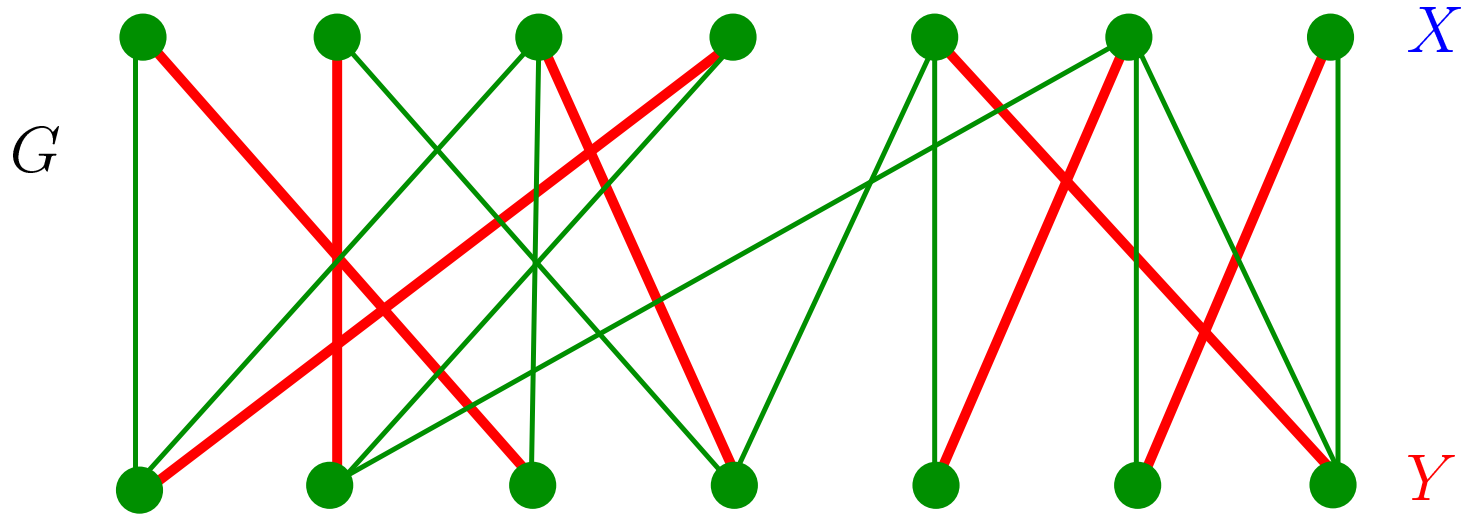
# Emparelhamentos

Problema: Dado um grafo bipartido encontrar um emparelhamento perfeito.



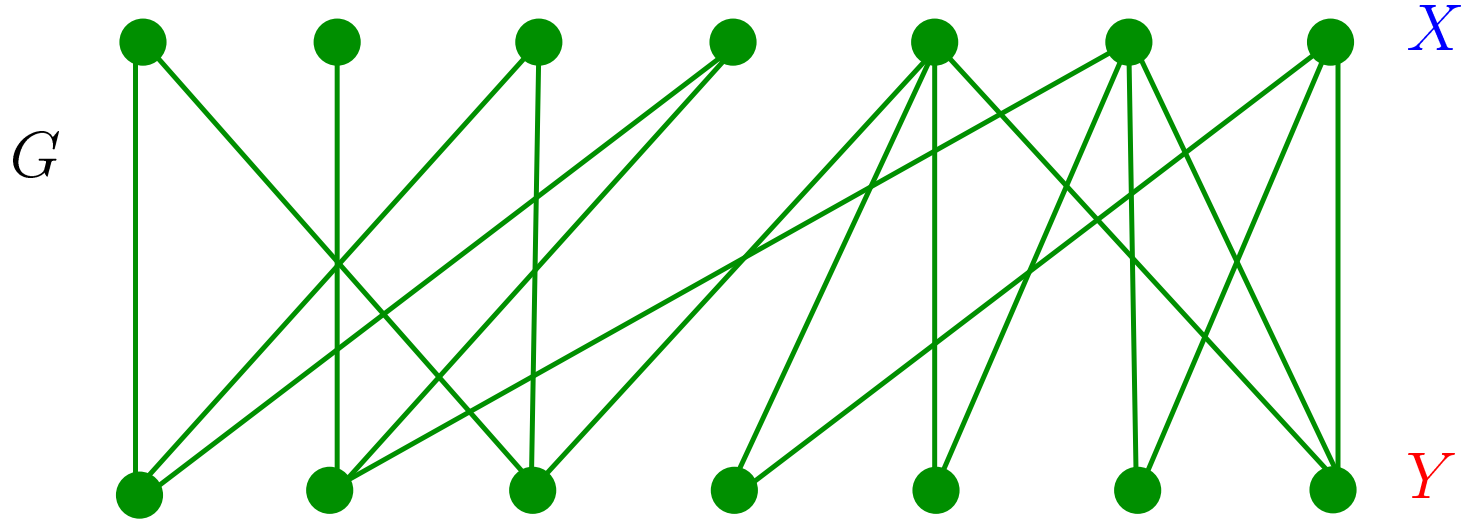
# Emparelhamentos

Problema: Dado um grafo bipartido encontrar um emparelhamento perfeito.



# Emparelhamentos

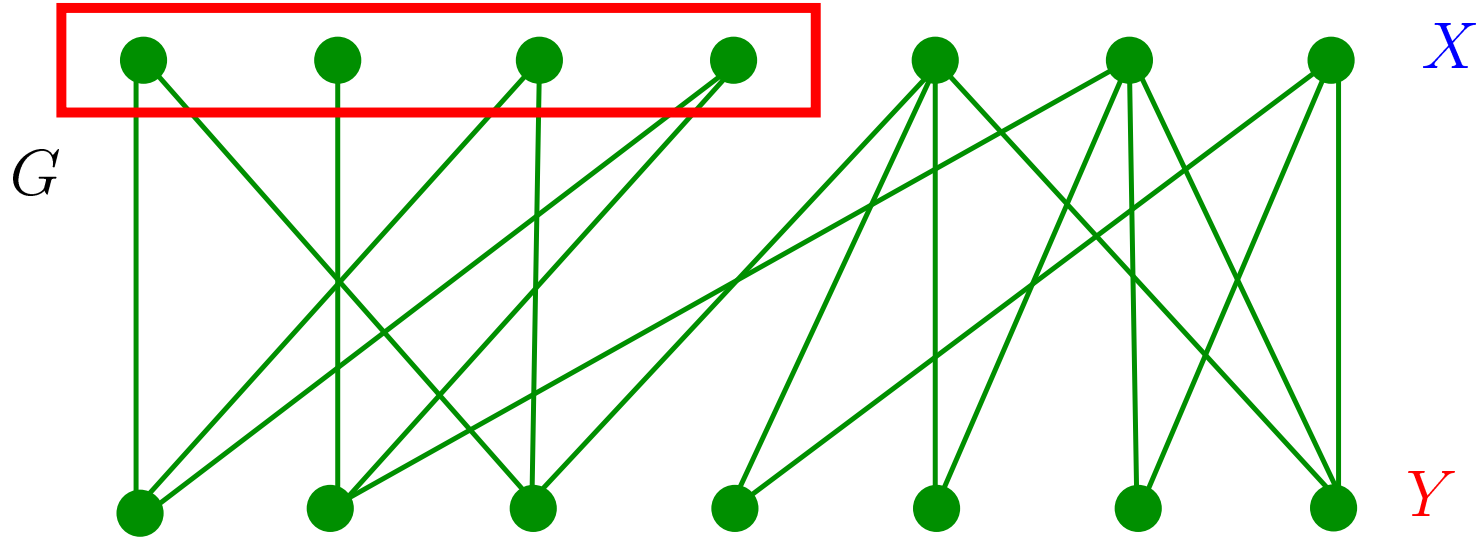
Problema: Dado um grafo bipartido encontrar um emparelhamento perfeito.




NÃO existe! Certificado?

# Emparelhamentos

Problema: Dado um grafo bipartido encontrar um emparelhamento bipartido.

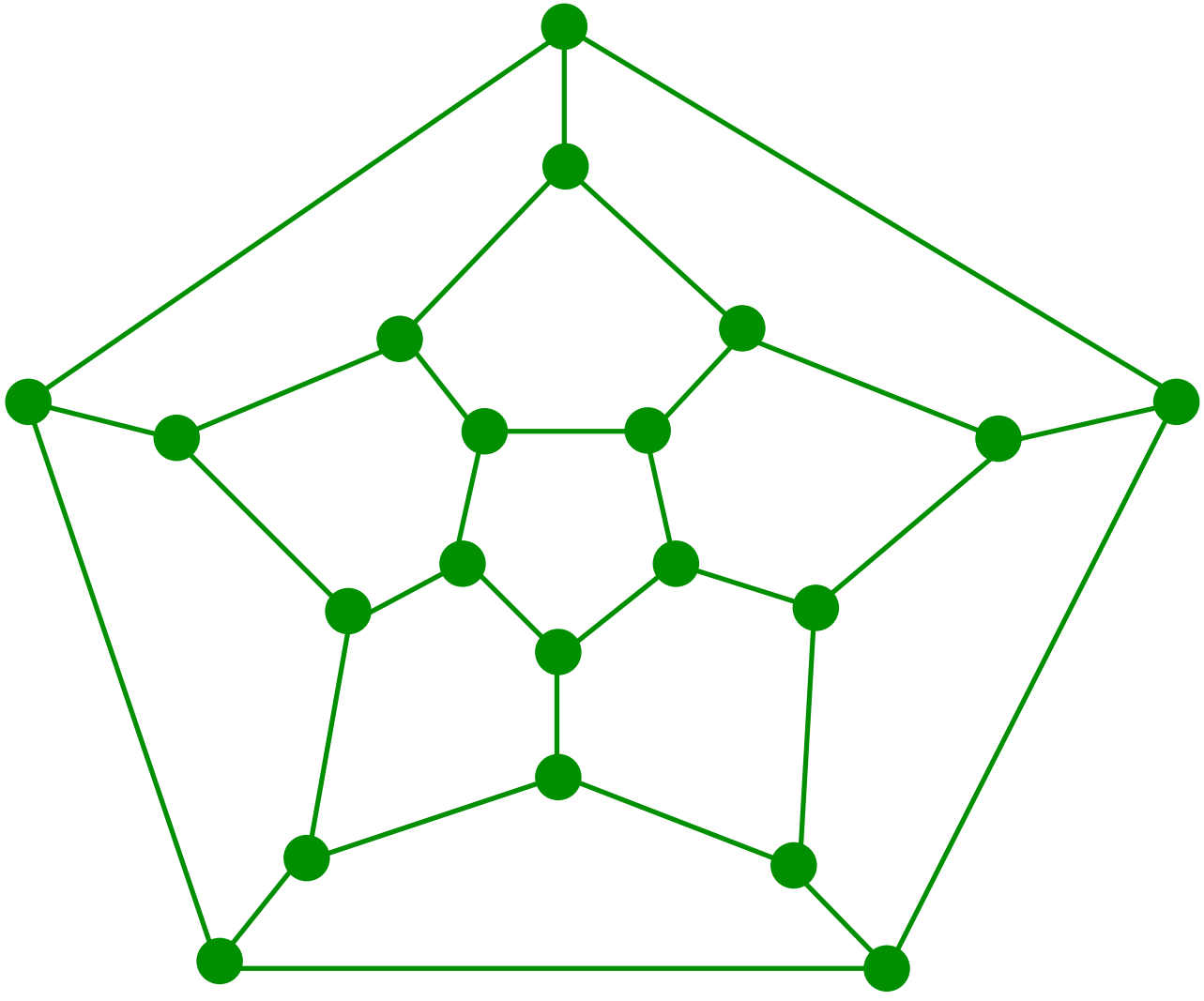



NÃO existe! Certificado: $S \subseteq X$ tal que $|S| > |\text{vizinhos}(S)|$.

# Grafos hamiltonianos

Problema: Dado um grafo encontrar um circuito hamiltoniano.

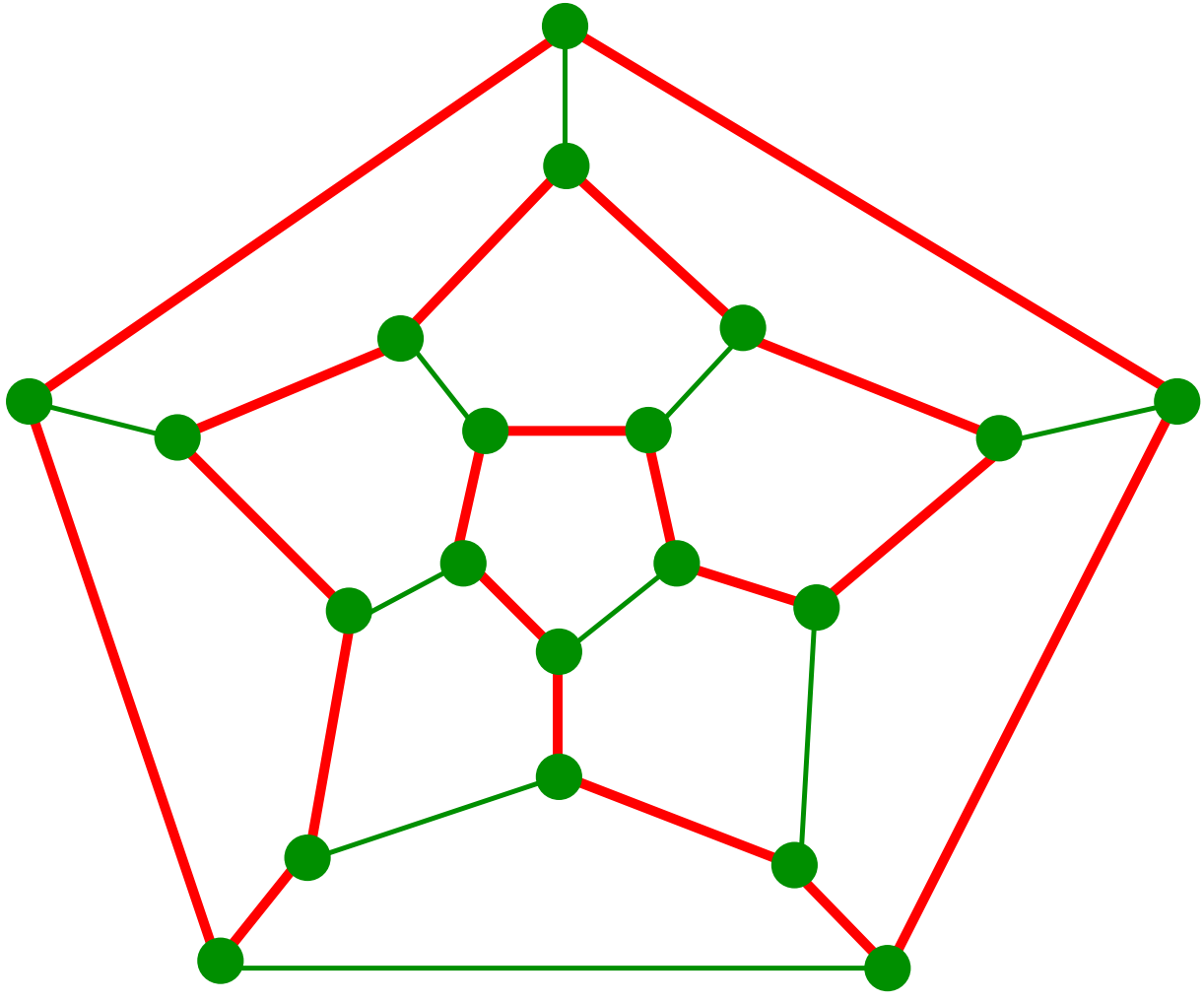
$G$



# Grafos hamiltonianos

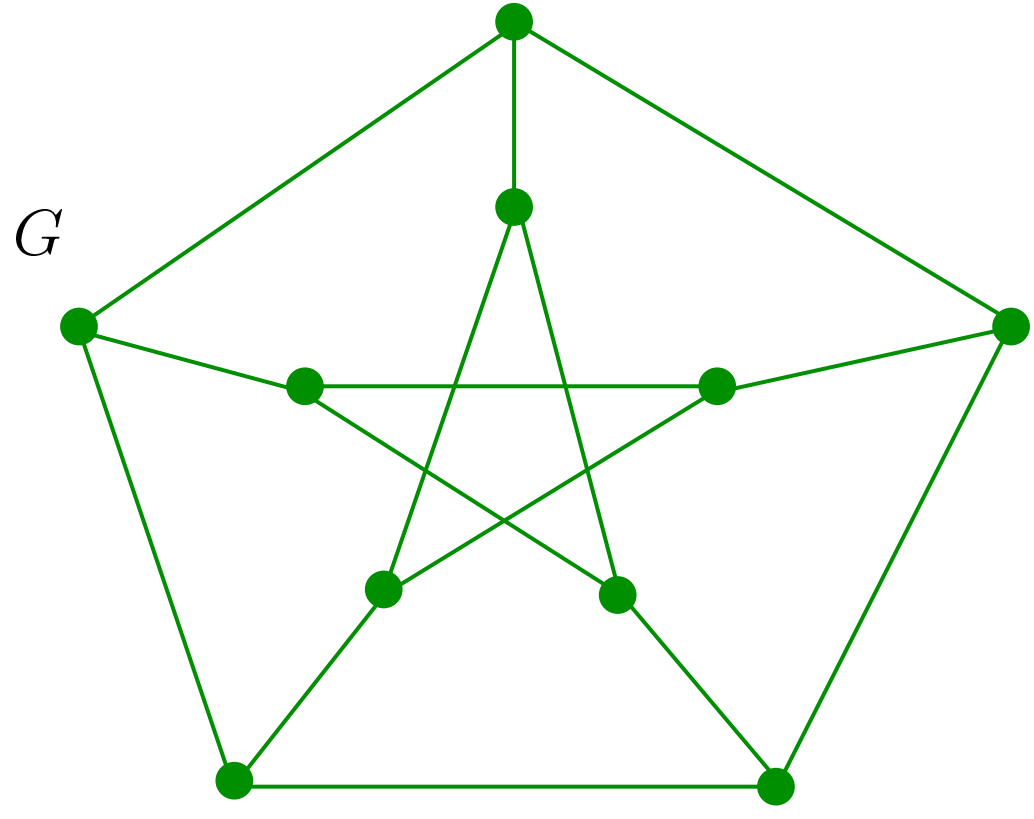
Problema: Dado um grafo encontrar um circuito hamiltoniano.

$G$



# Grafos hamiltonianos

Problema: Dado um grafo encontrar um circuito hamiltoniano.




NÃO existe! Certificado? Hmmm . . .

# Verificador polinomial para SIM

Um verificador polinomial para a resposta SIM a um problema $\Pi$ é um algoritmo polinomial ALG que recebe

> uma instância $I$ de $\Pi$ e um objeto $C$, tal que $\langle C \rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I \rangle^c)$ para alguma constante $c$

e devolve

> SIM para algum $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é SIM;
> NÃO para todo $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é NÃO.

No caso de resposta SIM, o objeto $C$ é dito um certificado polinomial ou certificado curto da resposta SIM a $\Pi(I)$.

# Exemplos

- Se $G$ é hamiltoniano, então um circuito hamiltoniano de $G$ é um certificado polinomial:

  dados um grafo $G$ e $C$ pode-se verificar em tempo $\mathrm{O}(\langle G \rangle)$ se $C$ é um circuito hamiltoniano.

- se $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$ possuem uma ssco $\geq k$, então uma subseqüência comum $Z[1\,..\,k]$ é um certificado polinomial resposta:

  dados $X[1\,..\,m], Y[1\,..\,n]$ e $Z[1\,..\,k]$ pode-se verificar em tempo $\mathrm{O}(m+n)$ se $Z$ é ssco de $X$ e $Y$.

- se $n$ é um número composto, então um divisor $d > 1$ de $n$ é um certificado polinomial.

# Verificado polinomial para NÃO

Um verificador polinomial para a resposta NÃO de um problema $\Pi$ é um algoritmo polinomial ALG que recebe

> uma instância $I$ de $\Pi$ e um objeto $C$, tal que $\langle C \rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I \rangle^c)$ para alguma constante $c$

e devolve

> SIM para algum $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é NÃO;
> NÃO para todo $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é SIM.

No caso de resposta SIM, o objeto $C$ é dito um certificado polinomial ou certificado curto da resposta NÃO a $\Pi(I)$.

# Classe NP

Formada pelos problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta SIM.

Em outras palavras, a classe NP é formada pelos problemas de decisão $\Pi$ para os quais existe um problema $\Pi'$ em P e uma função polinomial $p(n)$ tais que, para cada instância $I$ do problema $\Pi$, existe um objeto $C$ com $\langle C \rangle \leq p(\langle I \rangle)$ tal que a

> resposta a $\Pi(I)$ é SIM se e somente se a resposta a $\Pi'(I, C)$ é SIM.

O objeto $C$ é dito um certificado polinomial ou certificado curto da resposta SIM a $\Pi(I)$.

# Exemplos

Problemas de decisão com certificado polinomial para SIM:

- existe subseqüência crescente $\geq k$?
- existe subcoleção disjunta $\geq k$ de intervalos?
- existe mochila booleana de valor $\geq k$?
- existe mochila de valor $\geq k$?
- existe subseqüência comum $\geq k$?
- grafo tem circuito de comprimento $\geq k$?
- grafo tem circuito hamiltoniano?
- grafo tem emparelhamento (casamento) perfeito?

Todos esses problemas estão em NP.

# $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$

Prova:

se $\Pi$ é um problema em P, então pode-se tomar a seqüência de instruções realizadas por um algoritmo polinomial para resolver $\Pi(I)$ como certificado polinomial da resposta SIM a $\Pi(I)$.

Outra prova:

Pode-se construir um verificador polinomial para a resposta SIM a $\Pi$ utilizando-se um algoritmo polinomial para $\Pi$ como subrotina e ignorando-se o certificado $C$.

# $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}?$

É crença de muitos que a classe NP é maior que a classe P, ainda que isso

não tenha sido provado até agora.

Este é o intrigante problema matemático conhecido pelo rótulo "P $\neq$ NP?"

Não confunda NP com "não-polinomial".

# Classe co-NP

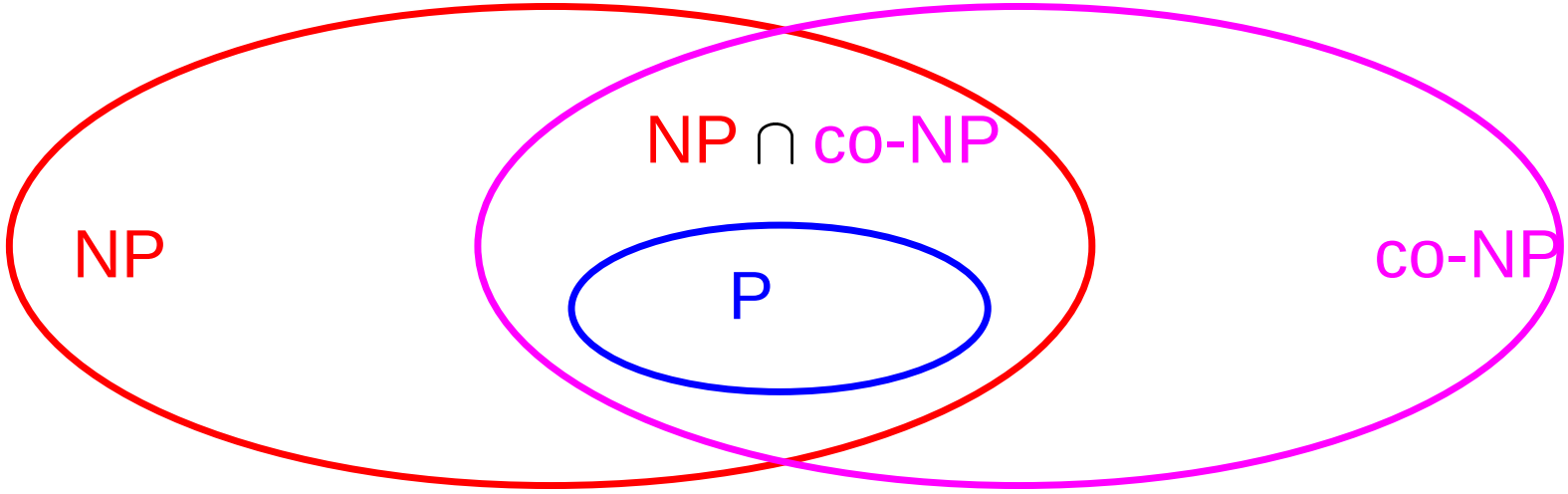
A classe co-NP é definida trocando-se SIM por NÃO na definição de NP.

Um problema de decisão $\Pi$ está em co-NP se admite um certificado polinomial para a resposta NÃO.

Os problemas em NP $\cap$ co-NP admitem certificados polinomiais para as respostas SIM e NÃO.

Em particular, P $\subseteq$ NP $\cap$ co-NP.

# P, NP e co-NP




$P \neq NP$?

$NP \cap \text{co-}NP \neq P$?

$NP \neq \text{co-}NP$?

# Redução polinomial

Permite comparar o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Uma redução de um problema $\Pi$ a um problema $\Pi'$ é um algoritmo ALG que resolve $\Pi$ usando uma subrotina hipotética ALG$'$ que resolve $\Pi'$, de tal forma que, se ALG$'$ é um algoritmo polinomial, então ALG é um algoritmo polinomial.

$\Pi \leq_P \Pi' =$ existe uma redução de $\Pi$ a $\Pi'$.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e $\Pi'$ está em P, então $\Pi$ está em P.

# Exemplo

$\Pi$ = encontrar um circuito hamiltoniano
$\Pi'$ = existe um circuito hamiltoniano?

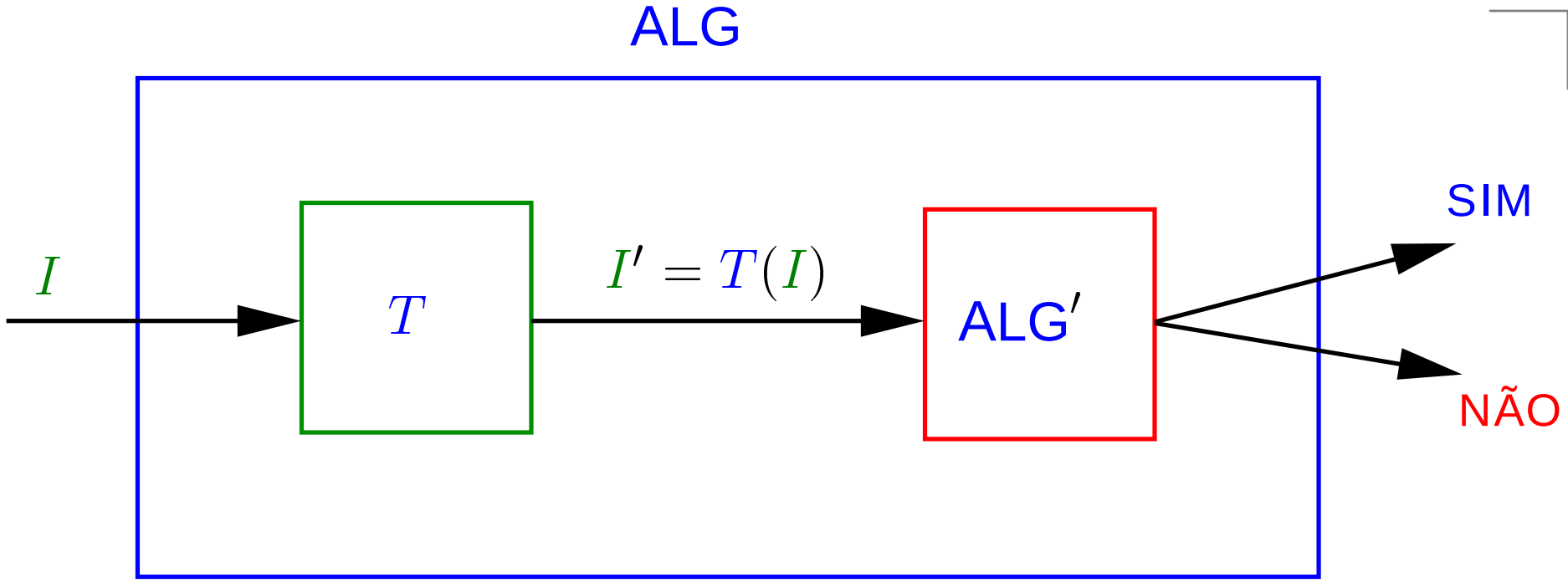
Redução de $\Pi$ a $\Pi'$: ALG$'$ é um algoritmo que resolve $\Pi'$

```
ALG (G)

1   se ALG'(G) = NÃO
2         então devolva "G não é hamiltoniano"
3   para cada aresta uv de G faça
4         H ← G − uv
5         se ALG'(H) = SIM
6               então G ← G − uv
7   devolva G
```

Se ALG$'$ consome tempo $\mathrm{O}(p(n))$, então ALG consome tempo $\mathrm{O}(m\ p(\langle G \rangle))$, onde $m$ = número de arestas de $G$.

# Esquema comum de redução




Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG′.

$T$ transforma uma instância $I$ de $\Pi$ em uma instância $I' = T(I)$ de $\Pi'$ tal que

$$\Pi(I) = \text{SIM} \text{ se e somente se } \Pi'(I') = \text{SIM}$$

$T$ é uma espécie de “filtro” ou “compilador”.

# Satisfatibilidade

Problema: Dada um fórmula booleana $\phi$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna $\phi$ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

Se $t(x_1) = \text{VERDADE}, t(x_2) = \text{FALSO}, t(x_3) = \text{FALSO}$,
então $t(\phi) = \text{VERDADE}$

Se $t(x_1) = \text{VERDADE}, t(x_2) = \text{VERDADE}, t(x_3) = \text{FALSO}$,
então $t(\phi) = \text{FALSO}$

# Sistemas lineares 0-1

Problema: Dadas uma matriz $A$ e um vetor $b$,

$$Ax \geq b$$

possui uma solução tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo $i$?

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & x_1 & & & & \geq & 1 \\ - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \geq & -1 \\ & & & & - & x_3 \geq & 0 \end{array}$$

tem uma solução 0-1?

Sim! $x_1 = 1, x_2 = 0$ e $x_3 = 0$ é solução.

# Exemplo 1

Satisfatibilidade $\leq_P$ Sistemas lineares 0-1

A transformação $T$ recebe uma fórmula booleana $\phi$
e devolve um sistema linear $Ax \geq b$
tal que $\phi$ é satisfatível se e somente se o sistema $Ax \geq b$ admite uma solução 0-1.

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & & & \geq & 1 \\ 1 - x_1 & + & 1 - x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ & & & & 1 - x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

# Exemplo 2

Verifique que

Circuito hamiltoniano $\leq_P$ Caminho hamiltoniano entre $u$ e $v$

Verifique que

Caminho hamiltoniano entre $u$ e $v \leq_P$ Caminho hamiltoniano

# Exemplo 3

Caminho hamiltoniano $\leq_P$ Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial $T$ que recebe um grafo $G$ e devolve uma fórmula booleana $\phi(G)$ tais que

$G$ tem caminho hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $\phi(G)$ é satisfatível.

Suponha que $G$ tem vértices $1, \ldots, n$.

$\phi(G)$ tem $n^2$ variáveis $x_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Interpretação: $x_{i,j} =$ VERDADE $\Leftrightarrow$ vértice $j$ é o $i$-ésimo vértice do caminho.

# Exemplo 3 (cont.)

Cláusulas de $\phi(G)$:

- "vértice $j$ faz parte do caminho:

$$(x_{1,j} \vee x_{2,j} \vee \cdots \vee x_{n,j})$$

  para cada $j$ ($n$ cláusulas).
- "vértice $j$ não está em duas posições do caminho:

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{k,j})$$

  para cada $j$ e $i \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ cláusulas).
- "algum vértice é o $i$-ésimo do caminho":

$$(x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \cdots \vee x_{i,n})$$

  para cada $i$ ($n$ cláusulas).

# Exemplo 3 (cont.)

Mais cláusulas de $\phi(G)$:

- "dois vértices não podem ser o $i$-ésimo":

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k})$$

para cada $i$ e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ cláusulas).

- "se $ij$ não é aresta, $j$ não pode seguir $i$ no caminho":

$$(\neg x_{k,i} \vee \neg x_{k+1,j})$$

para cada $ij$ que não é aresta ($\mathrm{O}(n^3)$ cláusulas).

A fórmula $\phi(G)$ tem $\mathrm{O}(n^3)$ cláusulas e cada cláusula tem $\leq n$ literais. Logo, $\langle \phi(G) \rangle$ é $\mathrm{O}(n^4)$.

Não é difícil construir o algoritmo polinomial $T$.

# Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ $G$ tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$ tal que $t(\phi(G)) = \text{VERDADE}$.

Para cada $i$ existe um único $j$ tal que $t(x_{i,j}) = \text{VERDADE}$.
Logo, $t$ é a codificadação de uma permutação

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$$

dos vértices de $G$, onde

$$\pi(i) = j \Leftrightarrow t(x_{i,j}) = \text{VERDADE}.$$

Para cada $k$, $(\pi(k), \pi(k+1))$ é uma aresta de $G$.

Logo, $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano.

# Exemplo 3 (cont.)

$G$ tem caminho hamiltoniano $\Rightarrow$ $\phi(G)$ satisfatível.

Suponha que $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano, onde $\pi$ é uma permutação dos vértices de $G$. Então

$t(x_{i,j}) =$ VERDADE se $\pi(i) = j$ e

$t(x_{i,j}) =$ VERDADE se $\pi(i) \neq j$,

é uma atribuição de valores que satisfaz todas as cláusulas de $\phi(G)$.

# 3-Satisfatibilidade

Problema: Dada um fórmula booleana $\phi$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em que cada cláusula tem exatamente 3 literais, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna $\phi$ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

Um literal é uma variável $x$ ou sua negação $\neg x$.

# Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial $T$ que recebe um fórmula booleana $\phi$ e devolve uma fórmula booleana $\phi'$ com exatamente 3 literais por cláusula tais que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow \phi' \text{ é satisfatível.}$$

A transformação consiste em substituir cada cláusula de $\phi$ por uma coleção de cláusulas com exatamente 3 literais cada e equivalente a $\phi$.

# Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma cláusula de $\phi$.

Caso 1. $k = 1$

Troque $(l_1)$ por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde $y_1$ e $y_2$ são variáveis novas.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y)\,(l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$. onde $y$ é uma variáveis nova.

Caso 3. $k = 3$

Mantenha $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$.

# Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)\,(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)\,(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4)\,\ldots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$ são variáveis novas

Verifique que $\phi$ é satisfátivel $\Leftrightarrow$ nova fórmula é satisfatível.

O tamanho da nova cláusula é $\mathrm{O}(m)$, onde $m$ é o número de literais que ocorrem em $\phi$ (contando-se as repetições).

# Problemas completos em NP

Um problema $\Pi$ em NP é NP-completo se cada problema em NP pode ser reduzido a $\Pi$.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin: Satisfatibilidade é NP-completo.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e $\Pi$ é NP-completo, então $\Pi'$ é NP-completo.

Existe um algoritmo polinomial para um problema NP-completo se e somente se P $=$ NP.

# Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema $\Pi'$ é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

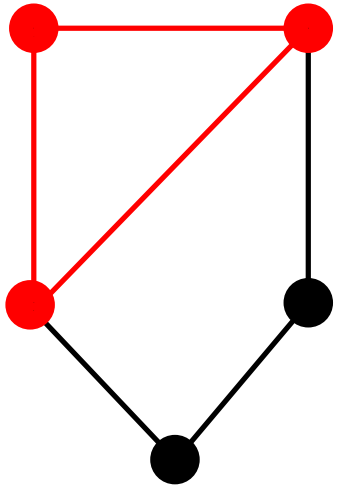
Para isto devemos:

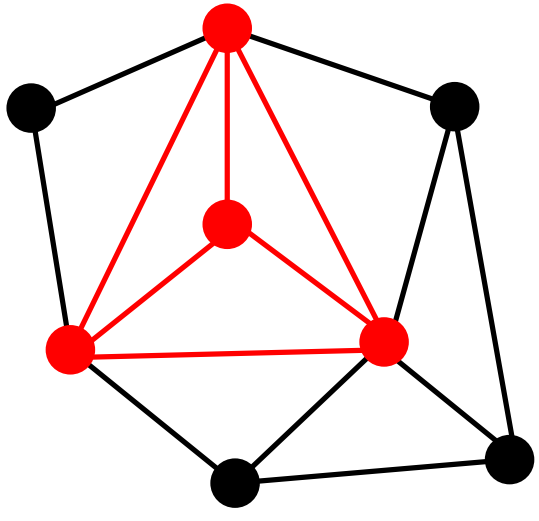
- Demonstrar que $\Pi'$ está en NP.
- Escolher um problema $\Pi$ sabidamente NP-completo.
- Demonstrar que $\Pi \leq_P \Pi'$.

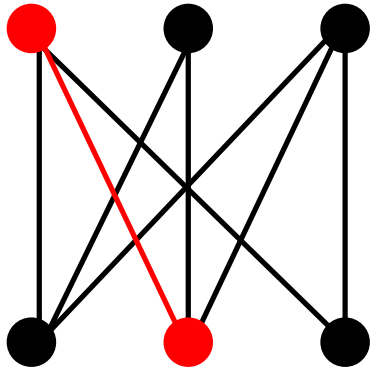
# Clique

Problema: Dado um grafo $G$ e um inteiro $k$, $G$ possui um clique com $\geq k$ vértices?

Exemplos:







clique com $k$ vértices $=$ subgrafo completo com $k$ vértices

# Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial $T$ que recebe um fórmula booleana $\phi$ com $k$ cláusulas e exatamente 3 literais por cláusula e devolve um grafo $G$ tais que

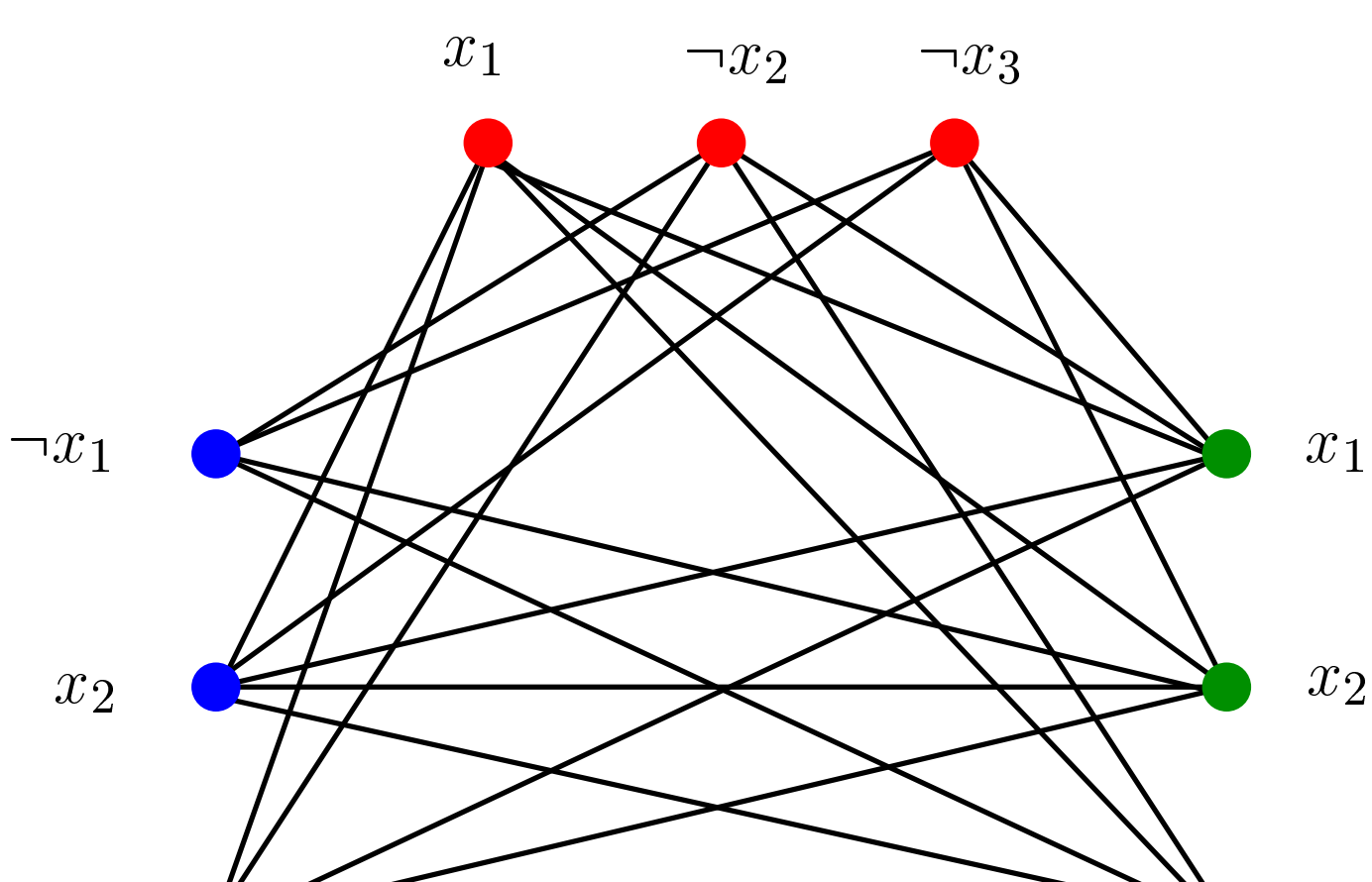
$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Para cada cláusula o grafo $G$ terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula. Logo, $G$ terá $3k$ vértices. Teremos uma aresta ligando vértices $u$ e $v$ se

- $u$ e $v$ são vértices que correspondem a literais em diferentes cláusula; e
- se $u$ corresponde a um literal $x$ então $v$ não corresponde ao literal $\neg x$.

# Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



# Problemas NP-difíceis

Um problema $\Pi$, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para $\Pi$ implica em P $=$ NP.

Todo problema NP-completo é NP-difícil.

Exemplos:

- Encontrar um circuito hamiltoniano é NP-difícil, mas não é NP-completo, pois não é um problema de decisão e portanto não está em NP.
- Satisfabilidade é NP-completo e NP-difícil.

# Mais problemas NP-difíceis

Os seguintes problema são NP-difíceis:

- mochila booleana
- caminho máximo
- caminho hamiltoniano
- escalonamento de tarefas
- subset-sum
- clique máximo
- cobertura por vértices
- sistemas 0-1

e mais um montão deles . . .

# Exercícios

**Exercício 25.A**

Suponha que os algoritmos ALG e ALG′ transformam cadeias de caracteres em outras cadeias de caracteres. O algoritmo ALG consome $O(n^2)$ unidades de tempo e o algoritmo ALG′ consome $O(n^4)$ unidades de tempo, onde $n$ é o número de caracteres da cadeia de entrada. Considere agora o algoritmo ALGALG′ que consiste na composição de ALG e ALG′, com ALG′ recebendo como entrada a saída de ALG. Qual o consumo de tempo de ALGALG′?

**Exercício 25.B** [CLRS 34.1-4]

O algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é polinomial? Justifique a sua resposta.

**Exercício 25.C** [CLRS 34.1-5]

Seja ALG um algoritmo que faz um número constante de chamadas a um algoritmo ALG′. Suponha que se o consumo de tempo de ALG′ é constante então o consumo de tempo de ALG é polinomial.

1. Mostre que se o consumo de tempo de ALG′ é polinomial então o consumo de tempo de ALG é polinomial.
2. Mostre que se o consumo de tempo de ALG′ é polinomial e ALG faz um número polinomial de chamadas a ALG′, então é possível que o consumo de tempo de ALG seja exponencial.

# Mais exercícios

**Exercício 25.D** [CLRS 34.2-1]
Mostre que o problema de decidir se dois grafos dados são isomorfos está em NP.

**Exercício 25.E** [CLRS 34.2-2]
Mostre que um grafo bipartido com um número ímpar de vértices não é hamiltoniano ($=$ possui um circuito hamiltoniano).

**Exercício 25.F** [CLRS 34.2-3]
Mostre que se o problema do Circuito hamiltoniano está em ¶, então o problema de listar os vértices de um circuito hamiltoniano, na ordem em que eles ocorrem no circuito, pode ser resolvido em tempo polinomial.

**Exercício 25.G** [CLRS 34.2-5]
Mostre que qualquer problema em NP pode ser resolvido por um algoritmo de consumo de tempo $2^{\mathrm{O}n^c}$, onde $n$ é o tamanho da entrada e $c$ é uma constante.

**Exercício 25.H** [CLRS 34.2-6]
Mostre que o problema do Caminho hamiltoniano está em NP.

**Exercício 25.I** [CLRS 34.2-7]
Mostre que o problema do caminho hamiltoniano pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos orientado acíclicos.

# Mais exercícios

**Exercício 25.J** [CLRS 34.2-8]
Uma fórmula booleana $\phi$ é uma tautologia se $t(\phi) = \text{VERDADE}$ para toda atribuição de $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$. Mostre que o problema de decidir se uma dada fórmula booleana é uma tautologia está em co-NP.

**Exercício 25.K** [CLRS 34.2-9]
Prove que P $\subseteq$ co-NP.

**Exercício 25.L** [CLRS 34.2-10]
Prove que se NP $\neq$ co-NP, então P $\neq$ NP.

**Exercício 25.M** [CLRS 34.2-11]
Se $G$ é um grafo conexo com pelo menos 3 vértices, então $G^3$ é o grafo que se obtém a partir de $G$ ligando-se por uma aresta todos os pares de vértices que estão conectados em $G$ por um caminho com no máximo três arestas. Mostre que $G^3$ é hamiltoniano.

**Exercício 25.N** [CLRS 34.3-2]
Mostre que se $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ e $\Pi_2 \leq_P \Pi_3$, então $\Pi_1 \leq_P \Pi_3$.

# Mais exercícios

**Exercício 25.O** [CLRS 34.3-7]
Suponha que $\Pi$ e $\Pi'$ são problemas de decisão sobre o mesmo conjunto de instâncias e que $\Pi(I) = \text{SIM}$ se e somente se $\Pi'(I) = \text{NÃO}$. Mostre que $\Pi$ é NP-completo se e somente se $\Pi'$ é co-NP-completo.
(Um problema $\Pi'$ é co-NP-completo se $\Pi'$ está em co-NP e $\Pi \leq_P \Pi'$ para todo problema $\Pi$ em co-NP.)

**Exercício 25.P** [CLRS 34.4-4]
Mostre que o problema de decidir se uma fórmula boolena é uma tautologia é co-NP-completo. (Dica: veja o exercício 25.O.)

**Exercício 25.Q** [CLRS 34.4-6]
Suponha que ALG$'$ é um algoritmo polinomial para Satisfatibilidade. Descreva um algoritmo polinomial ALG que recebe um fórmula booleana $\phi$ e devolve uma atribuição $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$ tal que $t(\phi) = \text{VERDADE}$.

**Exercício 25.Q** [CLRS 34.5-3]
Prove que o problema Sistemas lineares 0-1 é NP-completo.

**Exercício 25.R** [CLRS 34.5-6]
Mostre que o problema C aminho hamiltoniano é NP-completo.

# Mais um exercício

**Exercício 25.S** [CLRS 34.5-7]

Mostre que o problema de encontrar um circuito de comprimento máximo é NP-completo.