

SEGUNDA PROVA DE ALGORITMOS EM GRAFOS
BCC, 1o. SEMESTRE DE 2007

Instruções:

1. Não destaque as folhas do caderno de soluções.
2. A prova pode ser feita a lápis. Cuidado com a legibilidade.
3. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho.
4. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de soluções.
5. Asserções imprecisas valem pouco. Justifique suas asserções (dentro do razoável!).

Faça no máximo 3 questões.

1. [4 pontos] Considere a implementação do algoritmo de Kosaraju vista em sala:

```
static int post[maxV], postR[maxV];
static int cnt0, cnt1;
void SCdfsR(Graph G, int w)
{ link t;
  G->sc[w] = cnt1;
  for (t = G->adj[w]; t != NULL; t = t->next)
    if (G->sc[t->v] == -1) SCdfsR(G, t->v);
  post[cnt0++] = w;
}
int GRAPHsc(Graph G)
{ int v; Graph R = GRAPHreverse(G);
  cnt0 = 0; cnt1 = 0;
  for (v = 0; v < G->V; v++) R->sc[v] = -1;
  for (v = 0; v < G->V; v++) if (R->sc[v] == -1) SCdfsR(R, v);
  cnt0 = 0; cnt1 = 0;
  for (v = 0; v < G->V; v++) G->sc[v] = -1;
  for (v = 0; v < G->V; v++) postR[v] = post[v];
  for (v = G->V-1; v >= 0; v--)
    if (G->sc[postR[v]] == -1)
      { SCdfsR(G, postR[v]); cnt1++; }
  GRAPHdestroy(R);
  return cnt1;
}
```

Seja G o grafo dirigido com 10 vértices e 20 arcos dado por

0: 5	5: 9
1: 2 4	6: 8 4 5 1 9 2 7
2: 6	7: 3 8 1
3:	8: 5
4: 3	9: 8 0 4

- (i) Desenhe G . (ii) Simule a execução de $\text{GRAPHsc}(G)$, ilustrando as etapas principais desta simulação. Idealmente, diga conceitualmente o que está acontecendo em cada fase do algoritmo.
2. [3 pontos] Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função custo nas arestas de G . Por simplicidade, suponha que c é injetora. Suponha que $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ e $c(e_1) < c(e_2) < \dots < c(e_m)$.
- (i) Sejam T uma árvore geradora de G e T_0 a árvore geradora mínima (AGM) obtida executando-se o algoritmo de Kruskal sobre G . Suponha que $T \neq T_0$. Dizemos que uma aresta $e \in E$ *distingue* T de T_0 se e pertence a uma das árvores mas não pertence a outra, isto é, $e \in (E(T) \setminus E(T_0)) \cup (E(T_0) \setminus E(T))$. Seja i_0 o menor inteiro i tal que e_i distingue T e T_0 . Prove que $e_{i_0} \in E(T_0) \setminus E(T)$.
- (ii) Seja i_0 como em (i) e ponha $f = e_{i_0}$. Prove que existe $e \in E \setminus \{f\}$ que distingue T e T_0 tal que $T' = T + f - e$ é uma árvore geradora de G .
- (iii) Prove que $c(T') < c(T)$, onde T' é a árvore geradora em (ii) acima.
- (iv) Suponha que T é uma árvore geradora de (G, c) que não tem custo mínimo. Prove que existem arestas e e f em G tais que $T' = T - e + f$ tem custo menor que T .
3. [3 pontos] Considere a rede a seguir, com as capacidades indicadas:
- 0: 1(6) 2(6) 3(4) 4(4)
 1: 5(5)
 2: 1(4) 6(6)
 3: 6(5) 7(8)
 4: 3(5)
 5: 6(4) 9(4)
 6: 9(8)
 7: 8(5) 9(4)
 8: 4(4) 9(3)
 9:
- Na notação acima, por exemplo, 0: 1(6) significa que há um arco de 0 para 1 com capacidade 6. Suponha que $s = 0$ e $t = 9$.
- (i) Desenhe a rede, com as capacidades indicadas.
- (ii) Encontre um fluxo máximo de s para t nesta rede.
- (iii) Prove que o fluxo que você deu em (ii) é de fato máximo.
4. [3 pontos]
- (i) Enuncie o teorema de Hall, que dá uma condição necessária e suficiente para a existência de certos emparelhamentos em grafos.
- (ii) Seja B um grafo bipartido com bipartição $V = U \cup W$. Suponha que $|U| = |W| = m$ e que todos os vértices de B têm grau maior que $m/2$. Prove que B tem um emparelhamento de tamanho m .