Fluxos em redes: o Problema do Fluxo Máximo

Instância: uma rede (G, c) e vértices s e t

- $\triangleright$ $G = (V, E)$ um grafo dirigido
- $\triangleright$ s e $t \in V$ são dois vértices distinguidos
- $\triangleright$ $c\colon E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma *função capacidade* nas arestas

Fluxos em redes: o Problema do Fluxo Máximo

Queremos: um (s, t)-*fluxo* $f\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ em (G, c) de *valor* $\mathrm{val}(f)$ máximo

- f satisfaz as leis de Kirchhoff em todos os vértices $v \neq s,\ t$:

$$\sum_a f(a) = \sum_b f(b),$$

  onde a varia sobre todos os arcos da forma (x, v) e b varia sobre todos os arcos da forma (v, y)

- $f \leq c$

- $\mathrm{val}(f) =$ fluxo que emana de s, que é igual ao fluxo que é absorvido em t

Exemplo

	cap	fluxo	fluxo
0-1	2	2	2
0-2	3	1	2
1-3	3	2	1
1-4	1	0	1
2-3	1	0	1
2-4	1	1	1
3-5	2	2	2
4-5	3	1	2

O método de Ford e Fulkerson

Ford–Fulkerson(G, c, s, t):

1. $f \equiv 0$
2. **enquanto** existe 'caminho aumentador' P **faça**

   2.1 aumente f ao longo de P

3. **Devolva** f

O teorema do fluxo máximo e corte mínimo (maxflow-mincut)

- (s,t)-*corte*: corte $(S, V \setminus S)$ que separa s de t, isto é, $s \in S$ e $t \in V \setminus S$
- *capacidade de um corte*: $c(S, V \setminus S) = \sum_a c(a)$, onde a soma é sobre todo arco a que sai de S e entra em $V \setminus S$
- *corte mínimo*: corte que separa s e t e tem capacidade mínima
- *fluxo através de um corte*: $f(S, V \setminus S) = \sum_a f(a) - \sum_b f(b)$, onde a soma é sobre $a \in E(S, V \setminus S)$ e sobre $b \in E(V \setminus S, S)$

O teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema 1. *Sejam G, c, s e t como acima. Então*

$$\max_f \mathsf{val}(f) = \min_S c(S, V \setminus S),$$

onde o máximo é tomado sobre todos os (s,t)-fluxos e o mínimo é tomado sobre todos os cortes que separam s e t.

O teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Lema 2. *Sejam G, c, s e t como acima. Então*

$$\mathrm{val}(f) \leq c(S, V \setminus S)$$

para todo (s,t)-fluxo f e todo corte $(S, V \setminus S)$ que separa s e t.

O teorema do fluxo máximo e corte mínimo

- ▷ Prova do teorema do fluxo máximo/corte mínimo (desigualdade não-trivial): o método de Ford e Fulkerson
- ▷ *Caminho aumentador*: (s,t)-caminho (não necessariamente dirigido) em que os arcos que avançam no caminho não estão saturados e os arcos que retrocedem no caminho tem fluxo positivo