EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA DISCRETA
2o. SEMESTRE DE 2007

1. Prove as seguintes estimativas. Nesta questão, escrevemos $O(f(x))$ para qualquer termo y tal que $|y| \leq C|f(x)|$ para todo x satisfazendo $|x| \leq x_0$, onde C e $x_0 > 0$ são constantes absolutas. (Observe que, nestas estimativas, estamos intessados em uma vizinhança de 0.)
   (*i*) $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (*ii*) $1 + x > \exp\left\{x - x^2/2\right\}$ para todo $0 < x \leq 1$.
   (*iii*) $1-x > \exp\left\{-x-x^2\right\}$ para todo $0 < x < x_0$, para algum $x_0 > 0$. De fato, podemos tomar, por exemplo, $x_0 = 0.68$.
   (*iv*) Prove que $1 + x \geq \exp\{x/(1+x)\}$ para todo $x > -1$.
   [*Sugestão.* Lembre que $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$ uniformemente se $|x| \leq x_0$ e $x_0 < 1$. Integre ambos os lados para obter
$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots]$$

2. Prove as seguintes estimativas para $\binom{a}{b}$, onde a e b são inteiros não-negativos.
   (*i*) Se $a \geq b$, então
$$\binom{a}{b} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b. \tag{1}$$
   (*ii*)
$$\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}. \tag{2}$$
   (*iii*) Para todo $b > 0$,
$$\binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{3}$$
   [*Sugestão para* (*iii*). Avalie $(1+x)^a$ por cima e por baixo para $x = b/a$. Use, para tanto, $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ e o binômio de Newton: $(1 + x)^a \geq \binom{a}{b}x^b$.]
   (*iv*) Prove a seguinte versão mais forte de (*iii*):
$$\sum_{0\leq j\leq b} \binom{a}{j} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{4}$$

{*Data de entrega*: 28/8/2007}

Date: Versão de 14 de dezembro de 2007.

3. ($^+$) [Kleitman] Seja B um espaço normado. (Se você não está familiarizado com espaços normados, suponha que B é o $\mathbb{R}^d$ para algum d.) Sejam $x_1, \ldots, x_n \in B$. Considere as 2^n somas da forma

$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_k},$$

onde $i_1 < \cdots < i_k$ e $k \geq 0$. Dizemos que um conjunto S dessas somas é *pequeno* se quaisquer dois membros de S distam < 1.

Determine $f(n)$ para todo $n \geq 0$, onde definimos $f(n)$ como sendo

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \max\{|S| \colon S \text{ é pequeno}\}$$

e o (primeiro) máximo é tomado sobre todas as seqüências $x_1, \ldots, x_n \in B$ com $||x_i|| \geq 1$ para todo i (isto é, todos os x_i têm norma pelo menos 1).

4. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ e $\Delta \geq 0$. Considere as 2^n somas da forma

$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_k},$$

onde $i_1 < \cdots < i_k$ e $k \geq 0$. Dizemos que um conjunto S dessas somas é Δ-*pequeno* se quaisquer dois membros de S distam $\leq \Delta$.

Seja

$$m_d(n, \Delta) = \max_{x_1,\ldots,x_n} \max\{|S| \colon S \text{ é } \Delta\text{-pequeno}\}$$

e o (primeiro) máximo é tomado sobre todas as seqüências $x_1, \ldots, x_n \in B$ com $||x_i|| \geq 1$ para todo i (isto é, todos os x_i têm norma pelo menos 1). Prove que existe uma constante c_d que depende apenas de d para o qual vale

$$m_d(n, \Delta) \leq c_d(\lfloor \Delta \rfloor + 1)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{5}$$

{*Data de entrega*: 28/8/2007}

5. Para inteiros $t \leq n$, ponha

$$g(n, t) = \max |\mathcal{F}| \tag{6}$$

onde o máximo é tomado sobre todos os $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}([n]) = 2^{[n]}$ que são t-*intersectantes*, isto é, para todo F e $F' \in \mathcal{F}$, temos $|F \cap F'| \geq t$. (Note que, aqui, não estamos considerando r-grafos para algum r fixo, mas sistemas de conjuntos sem restrição de cardinalidade para seus membros).

(i) Mostre que $g(n, 1) = 2^{n-1}$.

(ii) Mostre que, para todo inteiro $t \geq 2$, temos $g(n, t) = (1+o(1))2^{n-1}$. Isto é, prove que $\lim_{n\to\infty} g(n, t)2^{-n+1} = 1$. [*Sugestão.* Use a fórmula de Stirling

$$n! = (1 + o(1))\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n} \tag{7}$$

para provar que

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor + k} = (1+o(1))2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}} = o(2^n), \tag{8}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ fixo. Deduza que

$$\sum_{k\geq (n+t)/2} \binom{n}{k} = (1+o(1))2^{n-1},$$

e use esse fato.]

{*Data de entrega*: 30/8/2007}

6. [Caso de igualdade no Erdős–Ko–Rado] Sejam n e k inteiros positivos, com $n > 2k$. Seja $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ um sistema k-uniforme intersectante com

$$|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}. \tag{9}$$

Prove que existe $x \in [n]$ para o qual temos

$$\mathcal{F} = \{F \subset [n] \colon |F| = k \text{ and } x \in F\}. \tag{10}$$

{*Data de entrega*: 30/8/2007}

7. [Erdős–Szekeres]
   (i) Prove que, para todo $n \geq 1$, existe $N = N(n)$ tal que toda seqüência $a_0, \dots, a_N$ de números contém uma subseqüência monótona com $n+1$ elementos, isto é, uma subseqüência não-crescente ou uma subseqüência não-decrescente com $n+1$ elementos. Mais formalmente, prove que existem $0 \leq i_0 < \cdots < i_n \leq N$ com $a_{i_0} \leq \cdots \leq a_{i_n}$ ou com $a_{i_0} > \cdots > a_{i_n}$.
   (ii) Prove que podemos tomar $N(n) = n^2$ em (i) acima.

{*Data de entrega*: 11/9/2007}

8. Para naturais n, a, e b, seja

$$f(n,a,b) = \max |\mathcal{F}|, \tag{11}$$

onde o máximo é tomado sobre todos os sistemas de conjuntos $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ satisfazendo

$$|F| \equiv a \pmod 2 \qquad \text{para todo } F \in \mathcal{F} \tag{12}$$

e

$$|F \cap F'| \equiv b \pmod 2 \quad \text{para todo } F,\, F' \in \mathcal{F} \text{ com } F \neq F'. \tag{13}$$

Determine ou estime $f(n,a,b)$ para todos pares $(a,b) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$ (os dois casos estudados em sala podem ser discutidos sucintamente).

{*Data de entrega*: 11/9/2007}

9. Seja $\mathcal{F} \subset \binom{[4r]}{2r}$ um sistema 2-intersecting com $|\mathcal{F}|$ o maior possível.
   (i) Prove que

$$|\mathcal{F}| = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon(r)\right)\binom{4r}{2r}, \tag{14}$$

onde $\lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$.

(ii) [Desafio] Tente provar (14) para $\varepsilon(r)$ 'grande'. Você consegue provar (14) para algum $\varepsilon(r)$ tal que $\varepsilon(r)\binom{4r}{2r} \to \infty$?

{*Data de entrega*: 11/9/2007}

10. Seja V o espaço dos vetores $(a_1, \ldots, a_n)^T$, onde os a_i pertencem a um corpo F. Para $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$ e $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$, defina o produto interno entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ como $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$. Além disso, seja M um subespaço de V e A uma transformação linear de V em V. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras:
    (a) Se A é não-singular, então A^T também é não-singular.
    (b) Se A é não-singular, então A^TA é não-singular.
    (c) A e A^TA têm o mesmo núcleo (kernel).
    (d) $M \cap M^\perp = \{0\}$, onde $M^\perp$ é o subespaço ortogonal a M, isto é, $M^\perp = \{\mathbf{a}\colon \mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0 \text{ para todo } \mathbf{b} \in M\}$.
    (e) O subespaço gerado por $M \cup M^\perp$ é igual a V.
    (f) $\dim(M) + \dim(M^\perp) = n$.
    (g) $(M^\perp)^\perp = M$.

    {*Data de entrega*: 14/9/2007}
11. (a) Seja V um espaço n-dimensional sobre $\mathrm{GF}(2) = \mathbb{Z}_2$, e M um subespaço de V. Mostre que $(1, \ldots, 1)^T \in \langle M \cup M^\perp \rangle$, onde $\langle X \rangle$ indica o espaço gerado por X.
    (b) Seja A uma matriz simétrica onde todas as entradas assumem valores em $\{0, 1\}$. Prove que a diagonal de A, considerada como um vetor linha, pertence ao espaço gerado pelas linhas de A sobre $\mathrm{GF}(2)$.

    {*Data de entrega*: 18/9/2007}
12. Seja G um grafo.
    (a) $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 de modo que os subgrafos de G induzidos por esses conjuntos satisfazem que todos os vértices têm grau par (nos subgrafos induzidos).
    (b) $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 de modo que o subgrafo induzido por V_1 satisfaz que todos os seus vértices têm grau par e o subgrafo induzido por V_2 satisfaz que todos os seus vértices têm grau ímpar.
    (c) Assuma que para todo vértice de um grafo há uma lâmpada e um botão. No começo todas as lâmpadas estão acesas. Apertar o botão de um vértice inverte a configuração de sua lâmpada e das lâmpadas dos seus vizinhos (as que estavam apagadas se acendem e as que estava acesas se apagam). Mostre que é possível apertar os botões de forma que todas as lâmpadas ficarão apagadas.

    {*Data de entrega*: 18/9/2007}
13. Consideramos aqui o número cromático $\chi(\mathbb{R}^n)$ do $\mathbb{R}^n$, o menor número de cores com que podemos colorir os pontos de $\mathbb{R}^n$ evitando dois pontos à distância 1 da mesma cor.

(i) Desenhe/descreva um grafo que prova que $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$. Justifique sua resposta sucintamente.

(ii) Descreva um grafo que prova que $\chi(\mathbb{R}^n) \geq 1.2^n$ para todo n com $n \geq n_0$ para algum n_0. Justifique sua resposta sucintamente. [*Observação.* Uma versão simplificada desse item é o Ex. 16. Se você preferir, você pode entregar Ex. 16 no lugar desse item.]

{*Data de entrega*: 25/9/2007}

14. (i) Seja G um grafo com conjunto de vértices $V(G) = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ e com $\chi(G) = q < \infty$. Prove que existe um subgrafo G' de G com um número finito de vértices e $\chi(G') = q$. Isto é, se todos os subgrafos finitos de um grafo infinito G são $(q-1)$-coloríveis, então G é $(q-1)$-colorível. [*Sugestão.* Seja G_i o subgrafo de G induzido por $[i]$ ($i \geq 1$). Suponha que $\chi(G_i) < q$ para todo i. Fixe uma $(q-1)$-coloração própria de G_i para todo i. Para infinitos i (digamos, $i_1 < i_2 < \dots$), o vértice 1 de G recebe uma mesma cor nas $(q-1)$-colorações dos $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots$, digamos c_1. Pinte o vértice 1 de G da cor c_1. Passamos a considerar os grafos $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots$ no resto da prova. Ponha $G_1^{(1)} = G_{i_1}$, $G_2^{(1)} = G_{i_2}$, etc. Para infinitos i (digamos, $i_1^{(1)} < i_2^{(1)} < \dots$), o vértice 2 de G recebe uma mesma cor nas $(q-1)$-colorações dos $G_{i_1}^{(1)}, G_{i_2}^{(1)}, \dots$, digamos c_2. Pinte o vértice 2 de G da cor c_2. Basta agora completar esta prova.] {*Data de entrega*: 25/9/2007}

(ii) [Para meditar] Considere agora o caso em que G acima tem conjunto de vértices $\mathbb{R}$ (e não mais $\mathbb{N}^*$). Como seria o resultado análogo? Como seria a prova?

15. Para $x \in \mathbb{R}$, seja $\pi(x)$ o número de números primos $p \leq x$. O teorema dos números primos nos diz que

$$\pi(x) = (1 + o(1))\frac{x}{\log x}, \tag{15}$$

onde $o(1) \to 0$ conforme $x \to \infty$. Seja p_k o k-ésimo primo (assim, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, e $p_{10} = 29$).

(i) Prove que $p_k/p_{k-1} = 1 + o(1)$ conforme $k \to \infty$.

(ii) Prove que $p_k = (1 + o(1))k \log k$ conforme $k \to \infty$.

{*Data de entrega*: 27/9/2007}

16. Seja $c(n) = \chi(\mathbb{R}^n)$ o número cromático do $\mathbb{R}^n$.

(i) Seja p um primo. Prove que

$$c(4p-1) \geq \binom{4p-1}{2p-1}\left(\sum_{0 \leq j < p}\binom{4p-1}{j}\right)^{-1}. \tag{16}$$

(ii) Prove que

$$\sum_{0 \leq j < p}\binom{4p-1}{j} \leq \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)\binom{4p-1}{p-1} \leq \frac{3}{2}\binom{4p-1}{p-1}.$$

(iii) Use a fórmula de Stirling (7) para deduzir que

$$\binom{n}{\alpha n} = \left(\frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right)^{(1+o(1))n},$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \binom{n}{\alpha n} = H(\alpha),$$

onde $H(\alpha) = \alpha\log(1/\alpha) + (1-\alpha)\log(1/(1-\alpha))$ é a assim chamada função entropia.

(iv) Prove que o lado direito de (16) é pelo menos $(1.139)^{4p-1}$ se p é suficientemente grande.

{*Data de entrega*: 27/9/2007} [*Observação.* Esta é uma versão levemente simplificada do Ex. 13(ii). Você pode entregar esse exercício em vez de entregar o Ex. 13(ii)]

17. O Exercício 16 mostra que $c(4p-1) \geq (1.139)^{4p-1}$ para todo primo p suficientemente grande. Use o resultado do Ex. 15 para deduzir que $c(n) \geq (1.13)^n$ para todo n suficientemente grande. {*Data de entrega*: 27/9/2007}

18. (i) Seja p um primo. Construa um conjunto X de $\binom{4p}{2p}$ pontos em $\mathbb{R}^{4p-1}$ com a seguinte propriedade: *todo $X' \subset X$ que não contém dois elementos ortogonais é tal que*

$$|X'| \leq 2 \sum_{0\leq j<p} \binom{4p}{j}.$$

[*Sugestão.* Considere vetores com coordenadas ± 1 em $\mathbb{R}^{4p}$ com o mesmo número de $+1$s e -1s.]

(ii) Use o conjunto X de (i) para construir um conjunto $Y \subset \mathbb{R}^d$ que desprova a conjectura de Borsuk (em dimensão suficientemente alta), onde $d = \binom{4p-1}{2}$. [*Sugestão.* Considere a aplicação

$$g\colon (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 4p-1} \mapsto (a_{ij})_{1\leq i<j\leq 4p-1},$$

que leva matrizes $(4p-1)\times(4p-1)$ em matrizes triangulares superiores.]

(iii) Seja $f(d)$ o menor k tal que todo $S \subset \mathbb{R}^d$ admite uma partição de Borsuk em k partes, isto é, uma partição em k partes de diâmetro menor que $\operatorname{diam}(S)$. Use (ii) para provar uma cota inferior exponencial para $f(d)$ para todo d suficientemente grande.

{*Data de entrega*: 2/10/2007}

19. (i) Fixe um inteiro d e um real $\varepsilon > 0$. O *grafo de Borsuk* $B(d,\varepsilon)$ tem como conjunto de vértices

$$S^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \colon \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

e $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \subset S^d$ é uma aresta de $B(d,\varepsilon)$ se

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq 2-\varepsilon.$$

Prove que para todo k e ℓ inteiros, existem d e $\varepsilon > 0$ tais que $B(d,\varepsilon)$ tem número cromático $\geq k$ e cintura ímpar $\geq 2\ell+1$. A *cintura ímpar* $\mathrm{og}(G)$ de um grafo G é o comprimento mínimo de um circuito de comprimento ímpar em G:

$$\begin{aligned}\mathrm{og}(G) = \min\{2r+1\colon \exists x_0,\dots,x_{2r} \in V(G) \text{ distintos}\\ \text{com } \{x_{i-1},x_i\} \in E(G) \text{ para todo } i \text{ (índices mod } 2r+1)\}\end{aligned}$$

[*Sugestão.* Use o teorema de Borsuk: *se cobrimos a esfera S^d com $d+1$ fechados (respectivamente, abertos), sempre há um par de pontos antípodas em um dos fechados (respectivamente, abertos).*]

(ii) Deduza do Ex. 14(ii) que $B(d,\varepsilon)$ (com d e ε apropriados) contém subgrafos finitos G com $\chi(G) \geq k$ e $\mathrm{og}(G) \geq 2\ell+1$.

{*Data de entrega*: 2/10/2007}

20. (Continuação do Ex. 19) Nesta questão, dizemos que um grafo G tem a propriedade $P(c)$ se todo subgrafo H de G é tal que $\alpha(H) \geq c|V(H)|$.
   (i) Mostre que se G é tal que $\chi(G) = k$, então G tem a propriedade $P(1/k)$. {*Data de entrega*: 2/10/2007}
   (ii) Mostre que se G tem a propriedade $P(1/2)$, então $\chi(G) \leq 2$. {*Data de entrega*: 2/10/2007}
   (iii) [Para meditar] Mostre que para todo inteiro k e $0 < c < 1/2$, existe um grafo G que tem a propriedade $P(c)$ mas $\chi(G) \geq k$. [*Sugestão.* Mostre que $B(d,\varepsilon)$ com d e ε apropriados é (basicamente) um tal grafo. Use Ex. 19(ii).]

   {*Data de entrega*: 2/10/2007}
21. Fixe um corpo F e um conjunto U de polinômios com coeficientes em F nas indeterminadas $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)$: $U \subset F[\mathbf{X}]$. Para $A \subset U$, pomos $V(A) = \{\mathbf{x} \in F^n\colon a(\mathbf{x}) = 0 \text{ para todo } a \in A\}$. Claramente, $V(A) = \bigcap_{a\in A} V(a)$, onde escrevemos $V(a)$ para $V(\{a\})$. Dado $X \subset F^n$, seja $I(X) = \{a \in U\colon a(\mathbf{x}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in X\}$. Prove que o par (V,I) constitui uma *conexão de Galois* entre as partes de U e as partes de F^n, isto é, prove as seguintes afirmações:
   (i) Tanto V quanto I *invertem* a ordem: para todo $A \subset B$, temos $V(A) \supset V(B)$ e analogamente para I.
   (ii) Para todo $A \subset U$ temos $I(V(A)) \supset A$ e para todo $X \subset F^n$ temos $V(I(X)) \supset X$.

   Deduza de (i) e (ii) que vale o seguinte.
   (iii) Sejam $\mathrm{im}\, V = \{V(A)\colon A \subset U\}$ e $\mathrm{im}\, I = \{I(X)\colon X \subset F^n\}$. Prove que V é uma bijeção de $\mathrm{im}\, I$ em $\mathrm{im}\, V$.

   Qual é a inversa de $V\colon \mathrm{im}\, I \to \mathrm{im}\, V$? {*Data de entrega*: 16/10/2007}
22. (Continuação do Ex. 21) Dizemos que $b \in U$ *depende* de A se $V(b) \supset V(A)$. O *fecho* de A em U é $\bar{A} = \{b \in U\colon\ b \text{ depende de } A\}$. Um conjunto A é *fechado* em U se $\bar{A} = A$. Prove as seguintes asserções:

(*i*) A operação $A \mapsto \bar{A}$ é uma *operação de fecho*, isto é, (a) $A \subset \bar{A}$ para todo A, (b) para quaisquer A e B com $A \subset B$, temos $\bar{A} \subset \bar{B}$, e (c) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

(*ii*) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de fechados em U. Então $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é um fechado.

Identifique os fechados de U em termos das aplicações V e I (veja Ex. 21). {*Data de entrega*: 16/10/2007}

23. Considere os padrões de zeros $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \in \{0, *\}^m$ ($\mathbf{x} \in F^n$) de uma seqüência de polinômios $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ sobre um corpo F nas indeterminadas $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Seja $\mathcal{Z}_F(\mathbf{f})$ o conjunto de tais padrões e $Z_F(\mathbf{f}) = |\mathcal{Z}_F(\mathbf{f})|$.

(*i*) Seja $U = \{f_1, \dots, f_m\}$. Exiba uma injeção de $\mathcal{Z}_F(\mathbf{f})$ nos fechados de U.

(*ii*) Dizemos que A *gera* um fechado B de U se $\bar{A} = B$. Suponha agora que os f_i em U são todos lineares, isto é, são da forma $f_i(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{X} \rangle + b_i = a_{i1}X_1 + \dots + a_{in}X_n + b_i$. Prove que todo fechado $B \subset U$ com $B \neq U$ admite um conjunto gerador A com $|A| \leq n$.

(*iii*) Conclua que, no caso em que os f_i são lineares, temos

$$Z_F(\mathbf{f}) \leq 1 + \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{j}. \tag{17}$$

(*iv*) Altere levemente o argumento acima para provar que (17) pode ser melhorado para

$$Z_F(\mathbf{f}) \leq \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{j}. \tag{18}$$

{*Data de entrega*: 16/10/2007}

24. Prove que a vasta maioria das funções booleanas de n variáveis exige circuitos booleanos com $\Omega(2^n/n)$ portas para sua representação (isto é, existe $c > 0$ tal que, para $n \geq n_0$, o número necessário de portas é maior que $c2^n/n$). {*Data de entrega*: 23/10/2007}

25. Seja $M(x_1, \dots, x_n)$ a função booleana 'da maioria', dada por

$$M(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{1 \leq i \leq n} x_i < n/2 \\ 1 & \text{se } \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \geq n/2. \end{cases} \tag{19}$$

(*i*) Prove que existe um circuito com $O(n^2)$ portas que calcula M. {*Data de entrega*: 23/10/2007}

(*ii*) Prove que existe um circuito com $O(n \log n)$ portas que calcula M. {*Data de entrega*: 23/10/2007}

(*ii*) [Desafio] Prove que existe um circuito com $O(n)$ portas que calcula M.

26. Neste problema, o termo Δ-*sistema* significa um Δ-sistema com 3 membros (isto é, um girassol com três pétalas). Seja $\varphi(n)$ o menor inteiro

tal que toda família $\mathcal{F}$ de n-conjuntos (conjuntos com n elementos) com $|\mathcal{F}| > \varphi(n)$ contém um Δ-sistema. Ademais, seja $\gamma(n)$ o menor inteiro tal que toda família *intersectante* de n-conjuntos com $|\mathcal{F}| > \gamma(n)$ contém um Δ-sistema.

(i) Prove que

$$\varphi(n) \leq n\varphi(n-1) + \gamma(n) \tag{20}$$

para todo $n > 1$.

(ii) Seja $\mathcal{E}$ um sistema intersectante de n-conjuntos com $\gamma = \gamma(n)$ membros que não contém um Δ-sistema. Seja

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{Ave}\{|E \cap E'| \colon E,\, E' \in \mathcal{E},\ E \neq E'\} \\ &= \binom{\gamma}{2}^{-1} \sum \{|E \cap E'| \colon E,\, E' \in \mathcal{E},\ E \neq E'\} \end{aligned} \tag{21}$$

a média das cardinalidades das interseções de pares de membros distintos de $\mathcal{E}$. Prove que

$$\gamma \leq \frac{n}{t}\varphi(n-1). \tag{22}$$

[*Sugestão.* Prove por um argumento de média que existe $E_0 \in \mathcal{E}$ para o qual $\mathrm{Ave}_{E \neq E_0} |E_0 \cap E| \geq t$. Também por um argumento de média, prove que existe $x \in E_0$ tal que $\deg(x) \geq t\gamma/n$.]

(iii) Prove que

$$\gamma(n) \leq t\varphi(n-1) + (n-1)^2\varphi(n-2). \tag{23}$$

[*Sugestão.* Seja $\mathcal{E}$ como em (ii) acima. Mostre por um argumento de média que existem E_1 e $E_2 \in \mathcal{E}$ tais que $|E_1 \cap E_2| \leq t$. Considere os F em $\mathcal{E} \setminus \{E_1, E_2\}$. Para limitar o número de F que são disjuntos de $I = E_1 \cap E_2$, observe que $F \cap (E_i \setminus I) \neq \emptyset$.]

(iv) Deduza que, para uma certa constante C, temos

$$\varphi(n) \leq Cn!\left(\frac{5}{3}\right)^n. \tag{24}$$

[*Observação.* Refinando este argumento, podemos provar que para todo $\varepsilon > 0$, existe C para o qual temos $\varphi(n) \leq Cn!(1+\varepsilon)^n$, isto é, $\varphi(n) \leq n!(1+o(1))^n$.]

{*Data de entrega*: 1/11/2007}

27. Fixe um inteiro positivo n. Nesta questão, escrevemos $\{x < y\}$ para um par de inteiros $\{x, y\}$ com $x < y$. Considere o grafo $\Gamma = \Gamma_n$ cujos vértices são os pares $\{x, y\} \subset [n]$ e cujas arestas são todos os pares de vértices da forma

$$\big\{\{x < y\}, \{y < z\}\big\}.$$

($\Gamma = \Gamma_n$ tem $\binom{n}{2}$ vértices e $\binom{n}{3}$ arestas.) Observe que Γ não tem triângulos. Mostre que, dado qualquer inteiro k, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, então o número cromático de $\Gamma = \Gamma_n$ é pelo menos k. {*Data de entrega*: 4/12/2007}

28. Suponha que
$$p = p(n) = \frac{\log n + f}{n}, \tag{25}$$
onde $f = f(n)$, e considere o grafo aleatório $G(n,p)$. Prove que as seguintes asserções valem para quase todo $G = G(n,p)$.
   (i) Se $f = f(n) \to \infty$, então G não tem vértices isolados.
   (ii) Se $f = f(n) \to -\infty$ e $|f| \leq \log n$, então G tem vértices isolados. De fato, (*) *o número de vértices isolados* $X = X(G)$ *em* G *satisfaz* $X \sim \exp\{-f\}$. [Inicialmente, reescreva (*) de forma mais explícita.]
   (iii) O que você consegue dizer sobre o caso em que $f = f(n) \to f_0$ para alguma contante f_0? [Aqui você pode apenas conjecturar o resultado; não é necessário provar sua conjectura.]

   {*Data de entrega*: 4/12/2007}
29. Prove que $p_0 = p_0(n) = n^{-2/3}$ é a função limiar para a existência de K^4 em $G(n,p)$. {*Data de entrega*: 4/12/2007}
30. Desenvolva um PTAS para o MaxCut restrito a grafos densos (isto é, suponha que temos uma constante $c > 0$ fixa e restringimos as entradas de MaxCut a grafos $G = G^n$ com $\geq cn^2$ arestas). {*Data de entrega*: 4/12/2007}
31. [Desafio] Para cada $n \geq 1$, defina o grafo G_n com conjunto de vértices $V_n = \mathcal{P}([n]) = 2^{[n]}$ e com conjunto de arestas E_n dado por $\{x,y\} \in E_n$ se e só se $|x \cap y|$ é ímpar. Mostre que, para todo $S \subset V_n$, temos
$$|E(G[S])| = \frac{1}{2}\binom{|S|}{2} + o(N^2), \tag{26}$$
onde $N = 2^n = |V_n|$.
32. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\ell(\varepsilon)$ para o qual vale a seguinte afirmação. Suponha que $G = G^n$ seja tal que $\chi(G - F) \geq 3$ para todo $F \subset E(G)$ com $|F| \leq \varepsilon\binom{n}{2}$. Então G contém um circuito ímpar de comprimento $\leq \ell(\varepsilon)$. {*Data de entrega*: 4/12/2007}