PRIMEIRA PROVA DE ESTRUTURAS DE DADOS
BCC, 1o. SEMESTRE DE 2008

Instruções:

1. Não destaque as folhas do caderno de soluções.
2. A prova pode ser feita a lápis. Cuidado com a legibilidade.
3. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho.
4. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de soluções.
5. Asserções imprecisas valem pouco. Justifique suas asserções (dentro do razoável!).

1. [3 pontos] Seja dado um inteiro positivo N. Queremos gerar N inteiros $x_1, \ldots, x_N$ em $S = \{0, 1, \ldots, N^2 - 1\}$, *sem repetição*, com todos os inteiros em S equiprováveis. Descreva um algoritmo para fazer isso. Seu algoritmo pode usar espaço $O(N)$ e deve ter complexidade de tempo não muito maior que $O(N)$, isto é, ele deve demorar tempo não muito maior que $O(N)$ (se você conseguir um algoritmo que, tipicamente, roda em tempo $O(N \log N)$, já está bom). Diga explicitamente quais são suas hipóteses e justifique suas afirmações ao descrever sua solução.

   Você deve supor que você tem acesso a um gerador de números aleatórios `RAND()`, que devolve um inteiro em S, com todos esses inteiros equiprováveis.
2. [3 pontos] Sejam dadas duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ de inteiros, ambas $m \times n$, satisfazendo $a_{ij} \le c_{ij}$ para todo i e j. Uma solução para o problema $P(A, C)$ é uma matriz de inteiros $B = (b_{ij})$ com $a_{ij} \le b_{ij} \le c_{ij}$ para todo i e j, com a propriedade de que (a) em toda linha de B um mesmo inteiro não ocorre mais de uma vez, e (b) em toda coluna de B um mesmo inteiro não ocorre mais de uma vez.

   (i) Considere as matrizes
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
   Encontre uma solução para o problema $P(A, C)$ para as matrizes A e C acima.

   (ii) Exiba explicitamente uma matriz M para o Problema da Cobertura Generalizada (PCG) com a propriedade de que as soluções do PCG para M correspondem às soluções do $P(A, C)$, onde A e C são as matrizes dadas em (1).

   (iii) Resolva (ii) para matrizes A e C genéricas. (Naturalmente, você deve descrever M de alguma forma sistemática, em função dos a_{ij} e c_{ij}.)
3. [4 pontos] Seja B_N uma ABB obtida da seguinte forma: sorteamos uma permutação das chaves $1, \ldots, N$, com todas as $N!$ permutações equiprováveis. Inserimos essas chaves em uma ABB inicialmente vazia, na ordem dada pela permutação sorteada. Seja B_N a ABB (aleatória) assim obtida.

(i) Desenhe todas as ABBs com $N = 4$ nós (são 14), supondo que temos as chaves A, B, C e D. Diga qual é a probabilidade de obtermos cada uma delas como uma B_N (naturalmente, com $N = 4$).

(ii) Considere agora o algoritmo de inserção aleatorizado, visto em sala (Programa 13.2 de Sedgewick), reproduzido abaixo:

```
link insertT(link h, Item item)
  { Key v = key(item);
    if (h == z) return NEW(item, z, z, 1);
    if (less(v, key(h->item))) { h->l = insertT(h->l, item); h = rotR(h); }
                          else { h->r = insertT(h->r, item); h = rotL(h); }
    return h;
  }
link insertR(link h, Item item)
  { Key v = key(item), t = key(h->item);
    if (h == z) return NEW(item, z, z, 1);
    if (rand()< RAND_MAX/(h->N+1)) return insertT(h, item);
    if less(v, t) h->l = insertR(h->l, item);
             else h->r = insertR(h->r, item);
    (h->N)++; return h;
  }
void STinsert(Item item)
  { head = insertR(head, item); }
```

Considere a ABB

```
      C
     / \
    B   D
   /
  A
```

Suponha que inserimos as chaves A, B, C, e D em uma ABB inicialmente vazia, usando o algoritmo de inserção aleatorizado dado acima. Diga qual é a probabilidade de obtermos a ABB acima, quando executamos as inserções nas três ordens abaixo:

(a) A, B, C, D,

(b) D, C, B, A,

(c) B, D, A, C.

Para determinar as probabilidades pedidas acima, você deve fazer as contas explicitamente, analisando o algoritmo passo a passo.