EXERCÍCIOS

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS

1o. SEMESTRE DE 2008

1. (i) Prove que

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|\\ &\quad -|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|, \qquad (1)\end{aligned}$$

   para quaisquer conjuntos A, B e C finitos.

   (ii) Sejam dados conjuntos finitos $A_1,\dots,A_n$. Prove que

$$\Big|\bigcup_{1\le i\le n} A_i\Big| = \sum_{\emptyset\neq J\subset[n]} (-1)^{|J|-1}\Big|\bigcap_{j\in J} A_j\Big|, \qquad (2)$$

   onde $[n]=\{1,\dots,n\}$ e a soma é sobre todos os conjuntos J não-vazios de $[n]$.

   $\{$*Data de entrega*: 11/3/2008$\}$

2. Sejam A_i como na Questão 1(ii) acima. Prove que

$$\Big|\bigcup_{1\le i\le n} A_i\Big| \le \sum_{1\le j\le n} |A_j| \qquad (3)$$

   e que

$$\Big|\bigcup_{1\le i\le n} A_i\Big| \ge \sum_{1\le j\le n} |A_j| - \sum_{1\le k<\ell\le n} |A_k\cap A_\ell|. \qquad (4)$$

3. Quantas partições tem um conjunto com n elementos? Dê as melhores estimativas superiores e inferiores que você conseguir.
4. Para cada natural n, seja P_n a ordem parcial cujos elementos são as partes de $[n]=\{1,\dots,n\}$ e a relação de ordem é a inclusão. Desenhe o diagrama de Hasse das ordens parciais P_0, P_1, P_2, P_3 e P_4. $\{$*Data de entrega*: 13/3/2008$\}$
5. Para naturais $a\le b$, seja $D(a,b)$ a ordem parcial sobre os elementos $\{x\in\mathbb{N}\colon a\le x\le b\}$, com a relação de ordem $\preceq$ dada por $x\preceq y$ se e só se x divide y.

   (i) Desenhe o diagrama de Hasse de $D(3,15)$.

   (ii) Quais são os elementos maximais de $D(3,15)$. E os minimais? A ordem $D(3,15)$ tem um elemento máximo? Ele tem um elemento mínimo?

   (iii) Para quais valores de a e b a ordem $D(a,b)$ tem um elemento mínimo? Para quais valores $D(a,b)$ tem um elemento máximo?

Date: Versão de 2 de junho de 2008.

(iv) Descreva a ordem $D(n+1, 2n)$ para todo número natural n. {*Data de entrega*: 13/3/2008}

6. Uma *anticadeia* em uma ordem parcial P é um subconjunto de P cujos elementos são dois-a-dois incomparáveis.[1] Determine o tamanho máximo de uma anticadeia na ordem P_n, definida na Questão 4.
7. São dados $2n$ points no espaço. Adicionamos a esta configuração n^2+1 segmentos, conectando estes pontos, de alguma forma arbitrária.[2] Mostre, dentre os $2n$ pontos originais, há três deles conectados por segmentos adicionados. {*Data de entrega*: 13/3/2008}
8. São dados n circunferências desenhadas no plano. Estas circunferências dividem o plano em regiões. Dizemos que duas dessas regiões são *adjacentes* se eles têm uma fronteira comum (isto é, se um arco de circunferência separa estas regiões). Mostre que é possível colorir estas regiões com duas cores, de forma que quaisquer duas regiões adjacentes têm cores diferentes.
9. (i) Sejam $r_1, \dots, r_{n-1}$ retas no plano ($n \geq 1$). Prove que existe uma reta r_n no plano que intercepta as $n-1$ retas dadas em $n-1$ pontos distintos.
   (ii) Deduza que $L_n \geq L_{n-1}+1$ para todo $n > 0$. Aqui, como visto em sala, L_n é o número máximo de regiões em que podemos dividir o plano com n retas.
10. Prove a unicidade no Teorema de Zeckendorf. {*Data de entrega*: 27/3/2008}
11. Desenhe todos os grafos de ordem 4, a menos de isomorfismo. Isto é, você deve dar a lista completa dos grafos com 4 vértices, sem incluir dois grafos isomorfos (há 11 deles).
12. (i) Desenhe o grafo de Petersen.
    (ii) Seja H o grafo linha de K^5, o grafo completo de ordem 5 (dessa forma, $V(H) = E(K^5)$ e x e y são adjacentes em H se e só se $x \cap y \neq \emptyset$). Quantos vértices e quantas arestas tem H?
    (iii) Seja J o complemento de H.[3] Desenhe J.
    (iv) Decida se o grafo de Petersen e o grafo J são isomorfos. Justifique sua resposta.
13. Seja $P = (V, E)$ o grafo de Petersen.
    (i) Um *automorfismo* de P é simplesmente um isomorfismo $\sigma\colon V \to V$ de P (isto é, um homomorfismo bijetor cuja inversa σ^{-1} é também um homomorfismo). Descreva $5! = 120$ automorfismos de P. {*Data de entrega*: 27/3/2008}
    (ii) [Desafio] O grafo P tem algum *outro* automorfismo?

---

[1] Seja $\preceq$ uma ordem sobre um conjunto P. Dizemos que x e y são *comparáveis* (em relação a $\preceq$) se $x \preceq y$ ou $y \preceq x$; caso nenhuma dessas duas relações valha, dizemos que x e y são *incomparáveis*.

[2] Havia um erro de digitação nesta questão. O enunciado agora está correto.

[3] Assim, dois vértices são adjacentes em J se e só se eles não são adjacentes em H.

14. (i) Existe um homomorfismo do grafo de Petersen P no K^3? Justifique sua resposta.
    (ii) Existe um homomorfismo do grafo de Petersen P no K^2? Justifique sua resposta.
    {*Data de entrega*: 27/3/2008}
15. Seja g_n o número de grafos de ordem n, a menos de isomorfismo. Assim, temos $g_4 = 11$ (veja Questão 11). Prove que
$$\frac{1}{n!}2^{\binom{n}{2}} \leq g_n \leq 2^{\binom{n}{2}}. \tag{5}$$
16. [Desafio] As cotas superior e inferior em (5) são bastante diferentes. Você consegue melhorar alguma dessas cotas significativamente?
17. Um *grafo cúbico* é um grafo 3-regular (todo vértice tem grau 3). Decida para quais naturais n existe um grafo cúbico de ordem n.
18. [Desafio] Seja G um grafo obtido pela adição de uma aresta a um grafo 4-regular. Assim, se G tem ordem n, ele tem $2n + 1$ arestas. Prove que G tem um subgrafo 3-regular.

Uma excelente fonte de exercícios para esta disciplina é o texto *Exercícios de Teoria dos Grafos*, de Paulo Feofiloff. Veja

`http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/`

Aliás, muitos dos exercícios desta lista serão tirados de lá.

19. Faça o exercício E 2.1.6 do ETG (Exercícios de Teoria dos Grafos). {*Data de entrega*: 27/3/2008}
20. Seja G um grafo e sejam x e y dois vértices de G.
    (i) Seja $W = w_0w_1 \ldots w_k$ um x–y passeio em em G (isto é, $w_0 = x$ e $w_k = y$). Prove que existe um x–y caminho em G que usa somente of vértices que ocorrem em W.
    (ii) Suponha que há dois x–y caminhos (distintos) em G. É verdade que G contém um circuito?
    (iii) Suponha que há duas x–y trilhas (distintas) em G. É verdade que G contém um circuito?
    (iv) Suponha que há dois x–y passeios (distintos) em G. É verdade que G contém um circuito?
    {*Data de entrega*: 3/4/2008}
21. Prove que todo grafo com $\delta(G) \geq 3$ tem um circuito de comprimento par.
22. Prove que todo grafo conexo contém um caminho de comprimento $\min\{2\delta(G), |V(G)| - 1\}$.
23. Seja G um grafo conexo e $\mathrm{dist}\colon V(G) \times V(G) \to \mathbb{R}$ a função distância associada a G. Prove que valem as seguintes propriedades:
    (i) $\mathrm{dist}(x, y) \geq 0$ para todo x, $y \in V(G)$ e $\mathrm{dist}(x, y) = 0$ se e só se $x = y$.
    (ii) $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$ para todo x, $y \in V(G)$.

(iii) $\mathrm{dist}(x,z) \leq \mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(y,z)$ para todo x, y e $z \in V(G)$.

24. Seja G um grafo. Prove que quaisquer duas das asserções abaixo implica a terceira:
    (i) G é conexo.
    (ii) G é acíclico.
    (iii) G tem $|V(G)| - 1$ arestas.
    Como são conhecidos os grafos G que satisfazem duas das (e portanto todas as) propriedades acima? {*Data de entrega*: 3/4/2008}
25. Seja T uma árvore com grau máximo $\Delta = \Delta(T)$. Mostre que T tem pelo menos Δ folhas. {*Data de entrega*: 15/4/2008}
26. Seja $\mathcal{F}$ uma coleção de subárvores de uma árvore T com a propriedade de que, para quaisquer dois membros T' e T'' de $\mathcal{F}$, temos $V(T') \cap V(T'') \neq \emptyset$. Mostre que existe um vértice de T que pertence a todas as árvores em $\mathcal{F}$. {*Data de entrega*: 15/4/2008}
27. (i) Descreva o algoritmo de busca em profundidade em um grafo. Explique como fica definida uma *árvore de busca em profundidade* ao executarmos tal busca em um grafo conexo.
    (ii) Seja G um grafo conexo e seja r um vértice de G. Suponha que executamos uma busca em profundidade em G, a partir de r. Seja T a árvore de busca em profundidade assim definida. Mostre que T é uma árvore normal com raiz r.
28. Seja T uma árvore e seja a um autormorfismo de T. Mostre que ou (i) existe um vértice x de T tal que $a(x) = x$ ou (ii) existe uma aresta $\{x, y\}$ tal que $a(\{x, y\}) = \{x, y\}$. {*Data de entrega*: 22/4/2008}
29. Sejam G um grafo e M um emparelhamento em G. Dizemos que um caminho P é um caminho *M-alternante* se as arestas presentes em P pertencem a M e a $E(G) \setminus M$, alternadamente. Podemos definir *circuitos M-alternantes* de forma análoga. Seja agora N um segundo emparelhamento em G. Descreva como é o subgrafo de G gerado pela diferença simétrica $M \triangle N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$.
30. Sejam G um grafo e M um emparelhamento em G. Mostre que M é de cardinalidade máxima se e só se não existe um caminho *M-aumentador* em G, isto é, um caminho M-alternante com ambos os extremos não-cobertos por M. {*Data de entrega*: 6/5/2008}.
31. Seja G um grafo bipartido com bipartição (A, B). Para cada $X \subset A$, seja $\mathrm{def}(X) = |X| - |\Gamma(X)|$. Seja $\gamma = \max_X \mathrm{def}(X)$, onde o máximo é tomado sobre todo $X \subset A$. Mostre que
    $$\nu(G) = |A| - \gamma. \tag{6}$$
    [*Sugestão.* Adicione uma quantiadade adequada de vértices a B, e conecte-os a todos os vértices em A.] {*Data de entrega*: 6/5/2008}
32. Seja G um grafo bipartido com bipartição (A, B). Mostre que as três asserções abaixo são equivalentes:

(i) G é conexo e cada aresta de G pertence a um emparelhamento perfeito.

(ii) G não é o complemento do K^2 e, para cada $x \in A$ e $y \in B$, o grafo $G - x - y$ tem um emparelhamento perfeito.

(iii) G não é o complemento do K^2, $|A| = |B|$, e, para cada $\emptyset \neq X \subset A$, com $X \neq A$, temos $|\Gamma(X)| > |X|$.

Os grafos bipartidos G satisfazendo (i)–(iii) são conhecidos como *grafos bipartidos elementares*. {*Data de entrega*: 6/5/2008}

33. Seja G um grafo bipartido com bipartição (A, B). Suponha que G tem um emparelhamento perfeito e que todo vértice em A tem grau pelo menos k. Mostre que G tem pelo menos $k!$ emparelhamentos perfeitos. {*Data de entrega*: 6/5/2008}
34. Para cada natural n, considere P_n, a ordem parcial das partes de $[n]$, ordenadas por inclusão. Assim, P_n tem 2^n elementos e $x \leq y$ se $x \subset y$.
    (i) Exiba explicitamente uma anticadeia de tamanho máximo em P_n, para $0 \leq n \leq 4$.
    (ii) Escreva P_n como uma união de cadeias, para $0 \leq n \leq 4$, com o número mínimo possível de cadeias em cada caso.
    (iii) Argumente cuidadosamente por que suas anticadeias em (i) são máximas e por que suas decomposições em (ii) são mínimas (usam o número mínimo possível de cadeias).
    {*Data de entrega*: 8/5/2008}
35. Encontre em P_n uma anticadeia de cardinalidade $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ e encontre uma decomposição de P_n nesse mesmo número de cadeias. Deduza que o tamanho máximo de uma anticadeia em P_n é $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. {*Data de entrega*: 8/5/2008}
36. (i) Prove que todo grafo cúbico sem arestas de corte tem um emparelhamento perfeito.
    (ii) Decida se todo grafo cúbico tem um emparelhamento perfeito.
    {*Data de entrega*: 8/5/2008}
37. Sejam G e H dois grafos. Defina o grafo $G \cup H$ como sendo o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup E(H)$. Prove que $\chi(G \cup H) \leq \chi(G)\chi(H)$. {*Data de entrega*: 20/5/2008}
38. Seja G um grafo com n vértices. Suponha que exista uma partição $V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ de $V(G)$ tal que, para todo $i \neq j$, existem $x_i \in V_i$ e $x_j \in V_j$ que *não* são adjacentes em G. Prove que $\chi(G) \leq n - k + 1$. {*Data de entrega*: 20/5/2008}
39. Prove que $\chi(G) + \chi(G^c) \leq n + 1$, onde G^c é o complemento de G e $n = |V(G)|$. Prove também que $\chi(G)\chi(G^c) \geq n$. {*Data de entrega*: 20/5/2008}
40. [Desafio] Prove ou desprove: existe uma função f tal que, para todo grafo G, temos $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.
41. Seja G um grafo e $0 \leq \beta \leq 1$ um número real. Dizemos que G tem a propriedade $P(\beta)$ se, para todo subgrafo H de G, temos que $\alpha(H) \geq$

$\beta|V(H)|$, onde, como de usual, $\alpha(H)$ é o número de independência de H. Prove que um grafo G que satisfaz $P(1/2)$ é bipartido. {*Data de entrega*: 27/5/2008}

42. [Desafio] Prove ou desprove: um grafo G que satisfaz $P(1/3)$ satisfaz $\chi(G) \le 10^{10}$. (Veja a Questão 41.) Seguindo a mesma linha, prove ou desprove: se G satisfaz $P(\frac{1}{2} - 10^{-6})$, então $\chi(G) \le 10^{10^{10}}$.
43. Prove que 'quase todo' grafo conexo G com n vértices é tal que $\alpha(G) \ge n/\Delta(G)$. Para quais G essa relação não vale? Encontre uma relação desse gênero que vale para todo grafo G. {*Data de entrega*: 27/5/2008}
44. Determine o índice cromático do grafo completo K^n, para todo valor de n. {*Data de entrega*: 27/5/2008}
45. Seja G um grafo. Suponha que, para todo $v \in V(G)$, temos um conjunto de *cores disponíveis* $S(v)$ para v. Queremos encontrar uma coloração própria dos vértices de G, digamos $f\colon V(G) \to S$, onde $S = \bigcup_{v\in V(G)} S(v)$, de forma que $f(v) \in S(v)$ para todo $v \in V(G)$. Em palavras: queremos uma coloração própria dos vértices de G que usa, em cada vértice, uma das cores disponíveis para ele. Seja s o menor inteiro com a seguinte propriedade: para quaisquer conjuntos $S(v)$ ($v \in V(G)$) com $|S(v)| \ge s$ para todo v, existe uma coloração própria f como exigido acima. Chamamos tal s de *número de escolha* de G, e o denotamos por $\mathrm{ch}(G)$.
    (i) Mostre que $\mathrm{ch}(G) \ge \chi(G)$.
    (ii) Decida se, para todo grafo G, temos $\mathrm{ch}(G) = \chi(G)$.
    {*Data de entrega*: 5/6/2008}
46. Seja m um inteiro positivo e considere $U = [2m-1] = \{1, \dots, 2m-1\}$. Denotamos por $X = \binom{U}{m}$ o conjunto de todos os subconjuntos de cardinalidade m de U. Sejam X_0 e X_1 duas 'cópias disjuntas' de X (podemos formalizar isso pondo $X_0 = X \times \{0\}$ e $X_1 = X \times \{1\}$). Considere o grafo bipartido completo B com conjunto de vértices $V = X_0 \cup X_1$ e com todo vértice em X_0 adjacente a todo vértice em X_1.
    (i) Prove que $\mathrm{ch}(B) \ge m + 1$.
    (ii) Conclua que existem grafos bipartidos G com n vértices satisfazendo $\mathrm{ch}(G) > (1/2)\log_2 n$.
    {*Data de entrega*: 5/6/2008}
47. [Desafio] Seja B um grafo bipartido, com bipartição $V(B) = U \cup W$. Suponha que $|U| = |W| = n$. Mostre que $\mathrm{ch}(B) \le \log_2(4n)$. [*Sugestão*. Sejam $S(v)$ ($v \in V(B)$) com $|S(v)| \ge s = \lfloor \log_2 n \rfloor + 2 > \log_2 n + 1$. Seja $S = \bigcup_{v\in V(G)} S(v)$. Considere uma partição aleatória $S = A \cup B$ de S, escolhendo para A um subconjunto de S sorteado uniformemente ao acaso (isto é, todos os subconjuntos de S têm a mesma probabilidade de serem escolhidos). Equivalentemente, cada elemento $c \in S$ está em A com probabilidade $1/2$, e todos esses eventos são independentes. Use as cores em A para colorir os vértices em U e use as cores em B para colorir os vértices em W. Note que

basta que, para cada $u \in U$, tenhamos $A \cap S(u) \neq \emptyset$ e que para cada $w \in W$, tenhamos $B \cap S(w) \neq \emptyset$.]

48. Seja G um grafo com seqüência de graus $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ $(n \geq 3)$.
   (i) Mostre que se $d_k > k$ para todo $k < n/2$, então G é hamiltoniano.
   (ii) Suponha que se $d_k \leq k$ e $d_l \leq l$, então $d_k + d_l \geq n$ $(k \neq l)$. Mostre que G é hamiltoniano.
   {*Data de entrega*: 10/6/2008}
49. Seja G um grafo n-regular com $2n+1$ vértices.
   (i) Mostre que G tem um circuito de comprimento pelo menos $2n$.
   (ii) Mostre que G é hamiltoniano.
   {*Data de entrega*: 10/6/2008}