PRIMEIRA PROVA DE INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS
BCC, 1o. SEMESTRE DE 2008

Instruções:

1. Não destaque as folhas do caderno de soluções.
2. A prova pode ser feita a lápis. Cuidado com a legibilidade.
3. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho.
4. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de soluções.
5. Asserções imprecisas valem pouco. Justifique suas asserções (dentro do razoável!).

1. [3 pontos] Seja g_n o número de grafos de ordem n, a menos de isomorfismo.
   (*i*) Determine g_n para $1 \leq n \leq 4$.
   (*ii*) Prove que
   $$\frac{1}{n!}2^{\binom{n}{2}} \leq g_n \leq 2^{\binom{n}{2}}. \tag{1}$$
   (*iii*) Prove algo (muito) levemente mais forte: prove que
   $$\frac{1}{n!}2^{\binom{n}{2}} < g_n < 2^{\binom{n}{2}}. \tag{2}$$
2. [3 pontos] Seja G um grafo conexo.
   (*i*) Seja T uma árvore geradora de G e seja e uma aresta de G que não pertence a T. Mostre que o grafo $T + e$, isto é, o grafo T acrescido da aresta e, contém exatamente um circuito. Tal circuito é conhecido como o *circuito fundamental de e em relação a T*. Denotaremos tal circuito por $C(e, T)$.
   (*ii*) Mostre que se $f \in C(e, T)$, então $T + e - f$ é uma árvore geradora de G.
   (*iii*) Defina um grafo $\mathcal{G}$ da seguinte forma: o conjunto de vértices de $\mathcal{G}$ é o conjunto das árvores geradoras de G; dois vértices de $\mathcal{G}$, isto é, duas árvores geradoras T e T' de G, são adjacentes em $\mathcal{G}$ se $E(T) \triangle E(T') = (E(T) \cup E(T')) \setminus (E(T) \cap E(T'))$ tem exatamente duas arestas de G. Mostre que $\mathcal{G}$ é um grafo conexo.
3. [4 pontos]
   (*i*) Prove que todo grafo com $\delta(G) \geq 3$ tem um circuito de comprimento par.
   (*ii*) Prove que todo grafo conexo contém um caminho de comprimento
   $$\min\{2\delta(G), |V(G)| - 1\}.$$
   [*Sugestão.* Considere um caminho $x_0, \ldots, x_\ell$ de comprimento máximo. Suponha que os vizinhos de x_ℓ neste caminho são $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$, com $i_1 < \cdots < i_d$. Lembrando que o grafo é conexo, o que acontece se $i_1 = 0$? Considere agora $U = \{x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_d+1}\}$. O que acontece se x_0 é adjacente a algum vértice em U?]

Date: Versão de 9 de maio de 2008.