EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA DISCRETA
2o. SEMESTRE DE 2008

1. [Desafio] Decida se P = NP. $\{$*Data de entrega*: até o final do semestre$\}$
2. [Desafio] Sejam $G_1, \dots, G_M$ grafos distintos sobre $[n] = \{1, \dots, n\}$. Suponha que a interseção $G_i \cap G_j$ contém um triângulo para todo i e j.
   (i) Exiba uma tal coleção de grafos com $M = 2^{\binom{n}{2}-3}$.
   (ii) Dê uma cota superior para M.
3. Prove as seguintes estimativas. Nesta questão, escrevemos $O(f(x))$ para qualquer termo y tal que $|y| \le C|f(x)|$ para todo x satisfazendo $|x| \le x_0$, onde C e $x_0 > 0$ são constantes absolutas. (Observe que, nestas estimativas, estamos intessados em uma vizinhança de 0.)
   (i) $1 + x \le \mathrm{e}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (ii) $1 + x > \exp\left\{x - x^2/2\right\}$ para todo $0 < x \le 1$.
   (iii) $1-x > \exp\left\{-x-x^2\right\}$ para todo $0 < x < x_0$, para algum $x_0 > 0$. De fato, podemos tomar, por exemplo, $x_0 = 0.68$.
   (iv) Prove que $1 + x \ge \exp\{x/(1 + x)\}$ para todo $x > -1$.
   [*Sugestão.* Lembre que $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots$ uniformemente se $|x| \le x_0$ e $x_0 < 1$. Integre ambos os lados para obter
   $$-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots]$$
4. Prove as seguintes estimativas para $\binom{a}{b}$, onde a e b são inteiros não-negativos.
   (i) Se $a \ge b$, então
   $$\binom{a}{b} \ge \left(\frac{a}{b}\right)^b. \tag{1}$$
   (ii)
   $$\binom{a}{b} \le \frac{a^b}{b!}. \tag{2}$$
   (iii) Para todo $b > 0$,
   $$\binom{a}{b} \le \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{3}$$
   [*Sugestão para* (iii). Avalie $(1+x)^a$ por cima e por baixo para $x = b/a$. Use, para tanto, $1 + x \le \mathrm{e}^x$ e o binômio de Newton: $(1 + x)^a \ge \binom{a}{b}x^b$.]

Date: Versão de 19 de novembro de 2008.

(iv) Prove a seguinte versão mais forte de (iii):

$$\sum_{0\le j\le b}\binom{a}{j}\le\left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{4}$$

5. Para inteiros $t\le n$, ponha

$$g(n,t)=\max|\mathcal{F}| \tag{5}$$

onde o máximo é tomado sobre todos os $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}([n])=2^{[n]}$ que são *t-intersectantes*, isto é, para todo F e $F'\in\mathcal{F}$, temos $|F\cap F'|\ge t$. (Note que, aqui, não estamos considerando r-grafos para algum r fixo, mas sistemas de conjuntos sem restrição de cardinalidade para seus membros).

(i) Mostre que $g(n,1)=2^{n-1}$.

(ii) Mostre que, para todo inteiro $t\ge 2$, temos $g(n,t)=(1+o(1))2^{n-1}$. Isto é, prove que $\lim_{n\to\infty}g(n,t)2^{-n+1}=1$. [*Sugestão.* Use a fórmula de Stirling

$$n!=(1+o(1))\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n} \tag{6}$$

para provar que

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor+k}=(1+o(1))2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}=o(2^n), \tag{7}$$

para todo $k\in\mathbb{Z}$ fixo. Deduza que

$$\sum_{k\ge(n+t)/2}\binom{n}{k}=(1+o(1))2^{n-1},$$

e use esse fato.]

{*Data de entrega*: 5/11/2008}

6. [Caso de igualdade no Erdős–Ko–Rado] Sejam n e k inteiros positivos, com $n>2k$. Seja $\mathcal{F}\subset\binom{[n]}{k}$ um sistema k-uniforme intersectante com

$$|\mathcal{F}|=\binom{n-1}{k-1}. \tag{8}$$

Prove que existe $x\in[n]$ para o qual temos

$$\mathcal{F}=\{F\subset[n]\colon |F|=k \text{ and } x\in F\}. \tag{9}$$

{*Data de entrega*: 5/11/2008}

7. Seja $\mathcal{F}\subset\binom{[4r]}{2r}$ um sistema 2-intersecting com $|\mathcal{F}|$ o maior possível. Prove que

$$|\mathcal{F}|=\left(\frac{1}{2}-\varepsilon(r)\right)\binom{4r}{2r}, \tag{10}$$

onde $\lim_{r\to\infty}\varepsilon(r)=0$. {*Data de entrega*: 17/11/2008}

8. Seja $H = H^n$ um grafo r-partido de ordem n. Prove que H tem no máximo
$$\binom{n}{2} - \sum_{0\le i<r} \binom{\lfloor (n+i)/r \rfloor}{2} \tag{11}$$
arestas. Mostre que, a menos de isomorfismo, existe um único tal H com o número de arestas dado por (11) (tais grafos são às vezes chamados de *grafos de Turán* e são denotados por $T_r(n)$).
9. Deduza o Teorema de Turán do Teorema de Erdős: o número máximo de arestas em um grafo G de ordem n que não contém K^{r+1} como subgrafo é dado por (11). Ademais, se um tal grafo G tem o número de arestas dado em (11), então G é isomorfo a $T_r(n)$ (veja o Exercício 8). {*Data de entrega*: 17/11/2008}
10. Considere o plano projetivo $\mathrm{PG}(2,q)$. Seja G o grafo cujos vértices são os pontos de $\mathrm{PG}(2,q)$, e o vértice (x,y,z) é adjacente (x',y',z') se e só se $xx' + yy' + zz' = 0$. Use G para mostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ex}(n, C^4) n^{-3/2} = 1/2. \tag{12}$$
{*Data de entrega*: 8/12/2008}