PROVA 2 DE MATEMÁTICA DISCRETA
2o. SEMESTRE DE 2008

Instruções:

1. As soluções a serem entregues devem ser elaboradas individualmente. Entretanto, você pode discutir os problemas com colegas e professores. **Cite toda e qualquer fonte que você usar para elaborar suas soluções.** O uso de fontes, devidamente citadas, não diminuirá sua nota.
2. Você deve tentar entregar ao menos um exercício de cada uma das seguintes 4 listas:
   (a) 1, 2, 3, 4
   (b) 5, 6, 7, 8
   (c) 9, 10, 11, 12, 13
   (d) 14, 15, 16, 17, 18.
   Você pode entregar quantos exercícios quanto quiser.

Questões:

1. Dizemos que uma cadeia $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_k\}$, com $A_1 \subset \cdots \subset A_k$, de elementos de $\mathcal{P}([n])$ é uma *cadeia simétrica* se valem as seguintes condições:
   (a) $\mathcal{C}$ é *saturada*, isto é, $|A_i| = |A_{i-1}| + 1$ para todo $1 < i \leq k$.
   (b) $|A_1| + |A_k| = n$.
   Prove as seguintes asserções:
   (i) $\mathcal{P}([n])$ pode ser particionado em cadeias simétricas. [*Sugestão.* Use indução em n. Suponha que $n > 0$ e que o resultado vale para valores menores de n. Seja $\mathcal{P}([n-1]) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$ uma decomposição de $\mathcal{P}([n-1])$ em cadeias simétricas. Construa duas cadeias a partir de cada $\mathcal{C}_\lambda$ da sequinte forma. Suponha que $\mathcal{C}_\lambda$ é a cadeia $A_1 \subset \cdots \subset A_k$. Considere então $A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset A_k \cup \{n\}$ e $A_1 \cup \{n\} \subset \cdots \subset A_{k-1} \cup \{n\}$.]
   (ii) [Sperner] A cardinalidade máxima de uma família de Sperner sobre $[n]$ (isto é, o número máximo de elementos em uma anticadeia em $\mathcal{P}([n])$) é $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.
2. [Erdős] Sejam $x_1, \dots, x_n$ números reais. Considere as 2^n somas da forma
$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_k},$$
   onde $i_1 < \cdots < i_k$ e $k \geq 0$. Digamos que um conjunto S dessas somas seja *pequeno* se quaisquer dois membros de S distem < 1 (a diferença é menor que 1 em módulo). Determine o tamanho máximo de um

Date: Versão de 7 de dezembro de 2008.

conjunto pequeno supondo que os x_i sejam todos tais que $|x_i| \geq 1$. Isto é, determine $f(n)$ para todo $n \geq 0$, onde definimos $f(n)$ como sendo

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \max\{|S| : S \text{ é pequeno}\}$$

e o (primeiro) máximo é tomado sobre todas as seqüências $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ com $|x_i| \geq 1$ para todo i.

3. [Kleitman] Generalizemos o Ex. 2 para dimensões arbitrárias. Supomos agora que os x_i estão em $\mathbb{R}^d$, onde $d \geq 1$. Determine $f_d(n)$ para todo $n \geq 0$, onde definimos $f_d(n)$ como sendo

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \max\{|S| : S \text{ é pequeno}\}$$

e o (primeiro) máximo é tomado sobre todas as seqüências $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ com $\|x_i\| \geq 1$ para todo i (isto é, todos os x_i têm norma pelo menos 1). Naturalmente, este problema se reduz ao Ex. 2 se $d = 1$.

   [*Sugestão.* Você pode achar interessante considerar a "filosofia" subjacente à solução sugerida do Ex. 1.]

4. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ e $\Delta \geq 0$. Considere as 2^n somas da forma

$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_k},$$

onde $i_1 < \cdots < i_k$ e $k \geq 0$. Dizemos que um conjunto S dessas somas é Δ-*pequeno* se quaisquer dois membros de S distam $\leq \Delta$.

   Seja

$$m_d(n, \Delta) = \max_{x_1,\ldots,x_n} \max\{|S| : S \text{ é } \Delta\text{-pequeno}\}$$

e o (primeiro) máximo é tomado sobre todas as seqüências $x_1, \ldots, x_n \in B$ com $||x_i|| \geq 1$ para todo i (isto é, todos os x_i têm norma pelo menos 1). Prove que existe uma constante c_d que depende apenas de d para o qual vale

$$m_d(n, \Delta) \leq c_d(\lfloor \Delta \rfloor + 1)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{1}$$

5. Sejam p um número primo e L um conjunto de s números inteiros. Suponha que $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto de n elementos tal que

   (*i*) $|A_i| \notin L \pmod p$ $\quad(1 \leq i \leq m)$;

   (*ii*) $|A_i \cap A_j| \in L \pmod p$ $\quad(1 \leq i < j \leq m)$.

   Prove que

$$m \leq \sum_{j=0}^{s} \binom{n}{j}.$$

   [*Observação.* Acima, $x \in L \pmod p$ significa que $x \equiv \ell$ para algum $\ell \in L$.]

[*Sugestão.* Considere o seguinte polinômio em $2n$ variáveis (x, y), $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$F(x, y) = \prod_{\ell \in L} (\langle x, y\rangle - \ell), \qquad \text{onde} \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Considere agora os polinômios em n variáveis $f_i(x) = F(x, v_i)$, onde $v_i \in \{0, 1\}^n$ é o *vetor de incidência* do conjunto A_i, isto é, $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$, onde

$$v_{ij} = \chi_{A_i}(j) = \begin{cases} 1 \text{ se } j \in A_i \\ 0 \text{ se } j \notin A_i. \end{cases}$$

Pela definição de F e pelas hipóteses do teorema, $p \mid f_i(v_j)$ se $i \neq j$ e $p \nmid f_i(v_i)$, para todo i. Como $x^2 = x$ para $x = 0$ e $x = 1$, podemos trocar os polinômios f_i por polinômios multilineares $\widetilde{f}_i$ de grau $\leq s$ que coincidem com f_i em $\{0, 1\}^n$, e portanto nos vetores v_i. Prove que $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \dots, \widetilde{f}_m$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Observe que a dimensão do espaço dos polinômios multilineares em n variáveis de grau $\leq s$ é $\sum_{j=0}^{s} \binom{n}{j}$. Deduza o resultado.]

6. Seja $c(n) = \chi(\mathbb{R}^n)$ o *número cromático* do $\mathbb{R}^n$: o número mínimo de cores com que podemos colorir os elementos de $\mathbb{R}^n$ de forma que quaisquer dois pontos da mesma cor não estão à distância 1.
   (*i*) Prove que $4 \leq c(2) \leq 7$.
   (*ii*) Seja p um primo. Prove que

$$c(4p - 1) \geq \binom{4p-1}{2p-1} \Bigg(\sum_{0 \leq j < p} \binom{4p-1}{j} \Bigg)^{-1}. \tag{2}$$

   (*iii*) Prove que

$$\sum_{0 \leq j < p} \binom{4p-1}{j} \leq \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \binom{4p-1}{p-1} \leq \frac{3}{2} \binom{4p-1}{p-1}.$$

   (*iv*) Lembra a fórmula de Stirling:

$$n! = (1 + o(1)) \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \tag{3}$$

   Use (3) para deduzir que

$$\binom{n}{\alpha n} = \left(\frac{1}{\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha}}\right)^{(1+o(1))n},$$

   ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \binom{n}{\alpha n} = H(\alpha),$$

   onde $H(\alpha) = \alpha \log(1/\alpha) + (1-\alpha) \log(1/(1-\alpha))$ é a assim chamada função entropia.

(v) Prove que o lado direito de (2) é pelo menos $(1.139)^{4p-1}$ se p é suficientemente grande.

[*Sugestão.* Para fazer (ii), considere o seguinte roteiro. Seja $n = 4p-1$. Seja V o conjunto dos vetores com coordenadas 0 e 1 com exatamente $2p-1$ coordenadas iguais a 1: $V = \{\mathbf{x} = (x_i)_{1\le i\le n} \in \{0,1\}^n : x_i = 1$ para $2p-1$ índices $i\}$. Considere o grafo $G = (V, E)$ sobre V, onde dois vértices são adjacentes se e só se a distância euclideana entre eles é $\sqrt{2p}$. Mostre que se $U \subset V$ tem mais de $\sum_{0\le j<p}\binom{n}{j}$ elementos, então há dois vértices adjacentes em U.]

7. Para $x \in \mathbb{R}$, seja $\pi(x)$ o número de números primos $p \le x$. O teorema dos números primos nos diz que
$$\pi(x) = (1+o(1))\frac{x}{\log x}, \tag{4}$$
onde $o(1) \to 0$ conforme $x \to \infty$. Seja p_k o k-ésimo primo (assim, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, e $p_{10} = 29$).
   (i) Prove que $p_k/p_{k-1} = 1 + o(1)$ conforme $k \to \infty$.
   (ii) Prove que $p_k = (1+o(1))k\log k$ conforme $k \to \infty$.
8. O Exercício 6 mostra que $c(4p-1) \ge (1.139)^{4p-1}$ para todo primo p suficientemente grande. Use o resultado do Ex. 7 para deduzir que $c(n) \ge (1.13)^n$ para todo n suficientemente grande.
9. Seja G um grafo infinito. A *densidade superior* $\bar\sigma(G)$ de G é definida como sendo
$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n(G), \tag{5}$$
onde
$$\sigma_n(G) = \sup\{\sigma(G[W]) : W \subset V(G),\ |W| = n\}, \tag{6}$$
e $\sigma(G[W])$ denota a densidade $e(G[W])\binom{|W|}{2}^{-1}$ do grafo $G[W] = (W, E(G) \cap \binom{W}{2})$ induzido por W em G. Deduza do teorema de Erdős e Stone ou Erdős–Stone–Simonovits que as únicas densidades superiores possíveis são
$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, 1.$$
Isto é
$$\{\bar\sigma(G) : G \text{ grafo infinito}\} = \left\{1 - \frac{1}{t} : t \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}.$$
10. [Erdős] Seja $f^{(d)}(n)$ o número máximo de vezes que a distância 1 ocorre em uma configuração de n pontos em $\mathbb{R}^d$. Mostre que $f^{(2)}(n) = O(n^{3/2})$. [*Sugestão.* Lembre que $\mathrm{ex}(n, K^{(2)}(2,3)) = O(n^{3/2})$ e use este resultado ($K^{(2)}(2,3)$ é o grafo bipartido completo com classes de vértices de cardinalidades 2 e 3).]
11. (Continuação do Ex. 10) Mostre que $f^{(2)}(n)$ é superlinear, isto é,
$$\lim_{n\to\infty} f^{(2)}(n)/n = \infty.$$

12. Seja $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{k}$ um hipergrafo k-uniforme. Para $\mathbf{x} = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, seja

$$\lambda_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) = \sum_{H\in\mathcal{H}} \prod_{i\in H} x_i. \tag{7}$$

Em palavras, para cada hiperaresta H de $\mathcal{H}$, consideramos o monômio $\prod_{i\in H} x_i$, e consideramos a soma de todos estes monômios. Pomos

$$\Delta = \Big\{\mathbf{x} = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n\colon \sum\nolimits_{1\leq i\leq n} x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0 \text{ para todo } i\Big\} \tag{8}$$

e

$$\lambda^*(\mathcal{H}) = \sup\{\lambda_{\mathcal{H}}(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in \Delta\}. \tag{9}$$

Para $\mathbf{x} = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, seja

$$\operatorname{supp}(\mathbf{x}) = \{i \in [n]\colon x_i \neq 0\}. \tag{10}$$

Segue da compacidade de Δ que $\lambda^*(\mathcal{H}) = \lambda_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}^*)$ para algum $\mathbf{x}^* = (x_i^*)_{1\leq i\leq n} \in \Delta$. Podemos, ademais, escolher $\mathbf{x}^*$ de forma que a cardinalidade de $\operatorname{supp}(\mathbf{x}^*)$ seja a menor possível.

- [Frankl e Rödl] Prove que para todo i e $j \in \operatorname{supp}(\mathbf{x}^*)$, existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $\{i, j\} \subset H \subset \operatorname{supp}(\mathbf{x}^*)$.

13. [Motzkin e Straus] (Continuação do Ex. 12)
    - (i) Mostre que $\lambda^*(\mathcal{H}) \geq |\mathcal{H}|/n^k$.
    - (ii) Suponha agora que $k = 2$, isto é, estamos falando de grafos. Seja $\omega(H)$ o número máximo de vértices mutuamente adjacentes em H, isto é, $\omega(H) = \max\{k\colon\ H \text{ contém } K^k\}$. Mostre que
    $$\lambda^*(H) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega}\right). \tag{11}$$
    - (iii) Deduza o seguinte corolário do teorema de Turán: para todo $t \geq 1$, temos
    $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{ex}(n, K^{t+1})\binom{n}{2}^{-1} = 1 - \frac{1}{t}. \tag{12}$$

14. [Lema de König] Nesta questão, consideramos árvores (infinitas). Uma *árvore* T é definida da seguinte forma recursiva: $T = (r; T_1, \ldots, T_d)$, onde r é um *vértice* distinguido, chamado de *raiz*, e os T_i ($1 \leq i \leq d$) são árvores não-vazias, chamadas de *subárvores* de r. As raízes das subárvores T_i são chamados de *filhos* de r. O número d é chamado de *grau* de r (d pode ser 0). Assim, r tem d filhos. Um caminho (que parte da raiz de T) é uma seqüência da forma $r_0, r_1, \ldots$, onde r_0 é a raiz de T e, em geral, r_i é um filho de r_{i-1}. Dizemos que uma árvore é localmente finita se todo vértice tem um número finito de filhos (isto é, d na definição acima é sempre um inteiro não-negativo).

    Prove que uma árvore localmente finita que tem infinitos vértices tem um caminho infinito.

15. Considere as seguintes asserções:
   (i) Qualquer partição do conjunto dos números naturais em um número finito de partes é tal que alguma das partes contém progressões aritméticas (PAs) arbitrariamente longas.
   (ii) Para todo natural $k \geq 1$, vale que qualquer partição do conjunto dos números naturais em um número finito de partes é tal que alguma das partes contém uma PA com k elementos.
   (iii) Para todos os naturais $k \geq 1$ e $r \geq 1$, existe um inteiro W tal que se $[W] = W_1 \cup \cdots \cup W_r$ é uma partição arbitrária de $[W]$, então para algum i a parte W_i contém uma PA de k elementos.

   Prove que as asserções acima são equivalentes. [*Sugestão.* Use o Lema de König para mostrar que (ii) implica (iii)]
16. [de Bruijn e Erdős] Nesta questão, consideramos o número cromático de grafos infinitos. Lembre que o número cromático $\chi(G)$ de um grafo G é o número mínimo de cores com que podemos colorir os vértices de G de forma que quaisquer dois vértices da mesma cor não são adjacentes.
   (i) Seja G um grafo com conjunto de vértices $V(G) = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ e com $\chi(G) = q < \infty$. Prove que existe um subgrafo G' de G com um número finito de vértices e $\chi(G') = q$. Isto é, se todos os subgrafos finitos de um grafo infinito G são $(q-1)$-coloríveis, então G é $(q-1)$-colorível. [*Sugestão.* Use o Lema de König. Alternativamente, siga o roteiro a seguir. Seja G_i o subgrafo de G induzido por $[i]$ $(i \geq 1)$. Suponha que $\chi(G_i) < q$ para todo i. Fixe uma $(q-1)$-coloração própria de G_i para todo i. Para infinitos i (digamos, $i_1 < i_2 < \dots$), o vértice 1 de G recebe uma mesma cor nas $(q-1)$-colorações dos $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots$, digamos c_1. Pinte o vértice 1 de G da cor c_1. Passamos a considerar os grafos $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots$ no resto da prova. Ponha $G_1^{(1)} = G_{i_1}$, $G_2^{(1)} = G_{i_2}$, etc. Para infinitos i (digamos, $i_1^{(1)} < i_2^{(1)} < \dots$), o vértice 2 de G recebe uma mesma cor nas $(q-1)$-colorações dos $G_{i_1}^{(1)}, G_{i_2}^{(1)}, \dots$, digamos c_2. Pinte o vértice 2 de G da cor c_2. Complete esta prova.]
   (ii) Considere agora o caso em que G acima tem conjunto de vértices $\mathbb{R}$ (e não mais $\mathbb{N}^*$). Como seria o resultado análogo? Como seria a prova?
17. Fixe um inteiro positivo n. Nesta questão, escrevemos $\{x < y\}$ para um par de inteiros $\{x, y\}$ com $x < y$. Considere o grafo $\Gamma = \Gamma_n$ cujos vértices são os pares $\{x, y\} \subset [n]$ e cujas arestas são todos os pares de vértices da forma

$$\big\{\{x < y\}, \{y < z\}\big\}.$$

   ($\Gamma = \Gamma_n$ tem $\binom{n}{2}$ vértices e $\binom{n}{3}$ arestas.) Observe que Γ não tem triângulos. Mostre que, dado qualquer inteiro k, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, então o número cromático de $\Gamma = \Gamma_n$ é pelo menos k. {*Data de entrega*: 15/10/2002}

18. Prove que existe uma coloração dos números naturais com azul e vermelho tal que nenhuma progressão aritmética infinita fica colorida com uma única cor.