EXERCÍCIOS DE MÉTODOS PROBABILÍSTICOS I
1o. SEMESTRE DE 2009

1. Prove as seguintes estimativas. Nesta questão, escrevemos $O(f(x))$ para qualquer termo y tal que $|y| \leq C|f(x)|$ para todo x satisfazendo $|x| \leq x_0$, onde C e $x_0 > 0$ são constantes absolutas. (Observe que, nestas estimativas, estamos intessados em uma vizinhança de 0.)
   (*i*) $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (*ii*) $1 + x > \exp\left\{x - x^2/2\right\}$ para todo $0 < x \leq 1$.
   (*iii*) $1 - x > \exp\left\{-x - x^2\right\}$ para todo $0 < x < x_0$, para algum $x_0 > 0$. De fato, podemos tomar, por exemplo, $x_0 = 0.68$.
   (*iv*) Prove que $1 + x \geq \exp\{x/(1+x)\}$ para todo $x > -1$.
   {*Data de entrega*: 10/3/2009}
   [*Sugestão.* Lembre que $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$ uniformemente se $|x| \leq x_0$ e $x_0 < 1$. Integre ambos os lados para obter
$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\ ]$$

2. Prove as seguintes estimativas para $\binom{a}{b}$, onde a e b são inteiros não-negativos.
   (*i*) Se $a \geq b$, então
$$\binom{a}{b} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b. \tag{1}$$
   (*ii*)
$$\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}. \tag{2}$$
   (*iii*) Para todo $b > 0$,
$$\binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{3}$$
   [*Sugestão para* (*iii*)*.* Avalie $(1+x)^a$ por cima e por baixo para $x = b/a$. Use, para tanto, $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ e o binômio de Newton: $(1 + x)^a \geq \binom{a}{b}x^b$.]
   (*iv*) Prove a seguinte versão mais forte de (*iii*): se $b \leq a$, então
$$\sum_{0 \leq j \leq b} \binom{a}{j} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{4}$$
   {*Data de entrega*: 10/3/2009}

Date: Versão de 16 de junho de 2009.

3. A fórmula de Stirling diz que
$$n! = (1+o(1))\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \tag{5}$$
onde $o(1) \to 0$ conforme $n \to \infty$.
   (*i*) Prove que, para todo ℓ fixo, independente de n, temos
$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + \ell} = (1+o(1))2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}}. \tag{6}$$
   (*ii*) Prove que se $k = k(n) = n/2 + c_n\sqrt{n}$, onde $c_n \to c$ $(n \to \infty)$ e c é uma constante, então
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \sim \frac{d}{\sqrt{n}} 2^n, \tag{7}$$
onde $d = d(c) > 0$ é uma constante que depende apenas de c.
   (*iii*) Prove que, para todo $0 < \alpha < 1$ fixo, temos
$$\binom{n}{\lfloor \alpha n \rfloor} = \left(\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}\right)^{(1+o(1))n}, \tag{8}$$
ou, equivalentemente,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \binom{n}{\alpha n} = H(\alpha), \tag{9}$$
onde $H(\alpha) = \alpha \log(1/\alpha) + (1-\alpha)\log(1/(1-\alpha))$ é a assim chamada função entropia.
   {*Data de entrega*: 10/3/2009}
4. [Shearer] Defina $d_i(x)$ como o número de vértices à distância i de x. Por exemplo, $d_1(x) = d(x)$. Seja G um grafo livre de triângulos.
   (*i*) Prove que
$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V_G} \frac{d_1(v)}{1 + d_1(v) + d_2(v)}. \tag{10}$$
   (*ii*) Seja G um grafo livre de C^3 e C^5 (isto é, G não contém circuitos de comprimento 3 e 5). Deduza de (*i*) que
$$\alpha(G) \geq \sqrt{n\overline{d}/2} = \sqrt{|E(G)|}, \tag{11}$$
onde $\overline{d} = 2|E(G)|/|V(G)|$ é o grau médio de G.
   {*Data de entrega*: 17/3/2009}
5. [Tuza] Sejam $(A_1, B_1), \ldots, (A_m, B_m)$ pares de conjuntos finitos com $A_i \cap B_i = \emptyset$ para todo i e com $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ou $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$. Se $|A_i| \leq a$ e $|B_i| \leq b$ para todo i, prove que
$$m \leq \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}. \tag{12}$$

[*Sugestão.* Prove que, para qualquer $0 < p < 1$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{m} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leq 1. \tag{13}$$

Utilize essa cota para derivar o resultado.] {*Data de entrega*: 17/3/2009}

6. [Katona, Nemetz, e Simonovits] Seja $\mathcal{F}$ um r-grafo.
   (i) Suponha que $\mathrm{ex}(n_0, \mathcal{F}) \leq M_0$. Prove que, para todo $n \geq n_0$, temos

   $$\mathrm{ex}(n, \mathcal{F}) \leq M_0 \binom{n_0}{r}^{-1} \binom{n}{r}. \tag{14}$$

   (ii) Deduza de (i) que

   $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ex}(n, \mathcal{F}) \binom{n}{r}^{-1} \tag{15}$$

   existe.

   {*Data de entrega*: 17/3/2009}
7. Seja

   $$\tau(r, k) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{ex}(n, \mathcal{K}_k^{(r)}) \binom{n}{r}^{-1}. \tag{16}$$

   Prove que

   $$\frac{5}{9} \leq \tau(3, 4) \leq \frac{7}{10}. \tag{17}$$

8. Seja $\mathcal{K}_-^4$ o 3-grafo de ordem 4 com 3 triplas, e seja $\mathcal{K}_{--}^4$ o 3-grafo de ordem 4 com 2 triplas.
   (i) Prove que $\mathrm{ex}(n, \mathcal{K}_{--}^4) \leq (1/3)\binom{n}{2}$.
   (ii) Prove que

   $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ex}(n, \mathcal{K}_-^4) \binom{n}{r}^{-1} \geq \frac{1}{4}. \tag{18}$$

   [*Sugestão.* Considere um torneio aleatório T de ordem n. Defina um 3-grafo a partir de T, definindo como hiperarestas as triplas que definem triângulos orientados de forma cíclica. Um *torneio* é uma orientação do grafo completo (portanto, existem $2^{\binom{n}{2}}$ torneios de ordem n e T é escolhido uniformemente ao acaso dentre todos esses torneios).]

   (iii) Dê uma cota superior não-trivial e interessante(!) para o limite em (18).
   (iv) Seja $\mathcal{F}(r, s)$ o r-grafo de ordem $2r - s$ constituído de duas hiperarestas com interseção de cardinalidade s. Prove

   $$\mathrm{ex}(n, \mathcal{F}(r, s)) \leq \binom{n}{s}\binom{r}{s}^{-1}. \tag{19}$$

   Observe que (19) generaliza (i).

   {*Data de entrega*: 17/3/2009}

9. Seja $\mathcal{H}^k$ o conjunto dos grafos de ordem k (a menos de isomorfismo). Dizemos que um grafo G é *k-universal* se G contém todos os grafos de ordem k como subgrafos induzidos, isto é, para cada $H \in \mathcal{H}^k$, existe um subgrafo induzido $\widetilde{H}$ de G que é isomorfo a H. Seja

$$f(n) = \max\{k\colon \text{existe um grafo } k\text{-universal } G \text{ de ordem } n\}. \tag{20}$$

   (i) Prove que $|\mathcal{H}^k| \geq 2^{\binom{k}{2}}/k!$.

   (ii) Deduza de (i) que $f(n) \leq 2\log_2 n + O(1)$.

   (iii) Prove que existe um n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, temos

$$f(n) \geq \log_2 n - \log_2 \log n - \log_2 \log_2 n. \tag{21}$$

   [*Sugestão.* Dizemos que um grafo G tem a propriedade $\mathcal{P}_k$ se, para quaisquer k-vértices distintos $x_1, \ldots, x_k$ de G e $0 \leq h \leq k$, existe um vértice y em G tal que y é adjacente a x_i para todo $0 \leq i \leq h$ e y não é adjacente x_i para todo $h < i \leq k$. Prove que a.q.t. $G_{1/2} = G(n, 1/2)$ tem a propriedade $\mathcal{P}_k$ para $k = \lfloor \log_2 n - \log_2 \log n - \log_2 \log_2 n \rfloor$.]

   {*Data de entrega*: 27/3/2009}

10. Prove que grafos completos, circuitos e árvores são grafos balanceados.

11. Seja H um grafo de ordem positiva e seja $d(H) = e(H)/v(H)$ a densidade de H. Seja também

$$\mathcal{P}_H = \{G\colon G \text{ contém } H \text{ como subgrafo}\}. \tag{22}$$

   (i) Um teorema de Erdős e Rényi afirma que $p_0 = p_0(n) = n^{-1/d(H)}$ é uma função limiar para a propriedade $\mathcal{P}_H$ se H é balanceado. Dê uma família "grande" de grafos conexos H que mostram que a hipótese de H ser balanceado neste teorema é essencial.

   (ii) Dê um bom candidato a função limiar para a propriedade $\mathcal{P}_H$ no caso geral, em que H não é necessariamente balanceado. Mostre ao menos algumas ("boas") propriedades deste seu candidato para justificar sua escolha. [*Sugestão.* Lembre que $m(H) = \max\{d(J)\colon J \subset H,\, v(J) > 0\}$ e considere este parâmetro.]

   {*Data de entrega*: 31/3/2009}

12. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de grafos monótona crescente.

   (i) Sejam $0 \leq M_1 = M_1(n) \leq M_2 = M_2(n) \leq \binom{n}{2}$. Prove que

$$\mathbb{P}(G(n, M_1) \in \mathcal{P}) \leq \mathbb{P}(G(n, M_2) \in \mathcal{P}). \tag{23}$$

   (ii) Sejam $0 \leq p_1 = p_1(n) < p_2 = p_2(n) \leq 1$ e suponha que $\mathcal{P}$ seja não-trivial. Mostre que, para todo n suficientemente grande, temos

$$\mathbb{P}(G(n, p_1) \in \mathcal{P}) < \mathbb{P}(G(n, p_2) \in \mathcal{P}). \tag{24}$$

   Isto é, no espaço $\mathcal{G}(n, p)$, a função $\varphi_n^{\mathcal{P}}\colon p \mapsto \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{P})$ é estritamente crescente para todo n suficientemente grande.

   (iii) Vale um resultado análogo a (ii) no espaço $\mathcal{G}(n, M)$?

   {*Data de entrega*: 3/4/2009}

13. Uma versão bastante precisa da fórmula de Stirling, devido a Robbins (1955), é que, para todo $n = 1, 2, \ldots,$

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n (2\pi n)^{1/2} \mathrm{e}^{\alpha(n)}, \tag{25}$$

onde

$$\frac{1}{12n+1} < \alpha(n) < \frac{1}{12n}. \tag{26}$$

Prove as seguintes desigualdades para o coeficiente binomial:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-1/6k} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} \left(\frac{n}{2\pi k(n-k)}\right)^{1/2} &\leq \binom{n}{k} \\ &\leq \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} \left(\frac{n}{2\pi k(n-k)}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{27}$$

14. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade qualquer de grafos e sejam $0 < p = M/N = M\binom{n}{2}^{-1} < 1$ e $q = 1 - p$. Prove que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G(n, M) \in \mathcal{P}) &\leq \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{P}) \mathrm{e}^{1/6M} (2\pi pqN)^{1/2} \\ &\leq 3M^{1/2}\, \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{P}). \end{aligned} \tag{28}$$

[*Sugestão.* Use que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{P}) = \\ &\qquad \sum_t \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{P} \mid e(G(n, p)) = t)\, \mathbb{P}(e(G(n, p)) = t) \end{aligned} \tag{29}$$

e que (27) fornece uma cota inferior adequada para $\mathbb{P}(e(G(n, p)) = t)$ para $t = M$.] {*Data de entrega*: 14/4/2009}

15. (*i*) A *fórmula de Cayley* diz que há k^{k-2} árvores rotuladas de ordem k. Prove que a probabilidade de $G(n, p)$ ter um componente de ordem k é no máximo

$$\binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} \mathrm{e}^{-pk(n-k)}. \tag{30}$$

(*ii*) Seja $\omega = \omega(n) = \log \log \log n$ e seja $t = \lfloor (n/2)(\log n - \omega) \rfloor$. Mostre que a.q.c. $G(n, t) \in \mathcal{G}(n, t)$ é constituído de um componente de ordem $(1 - o(1))n$ e de vértices isolados. [*Sugestão.* Trabalhe com $G(n, p)$ com p adequado e use o resultado do Exercício 14.]

(*iii*) Consideramos agora processos $\widetilde{G} = (G_t)_{t=0}^N \in \widetilde{\mathcal{G}}(n)$. Prove que a.q.c. $\widetilde{G}$ é tal que

$$\tau(\widetilde{G}; \mathrm{conn}) = \tau(\widetilde{G}; \delta \geq 1). \tag{31}$$

Isto é, a.q.c., no momento em que os vértices isolados desaparecem, o grafo G_t torna-se conexo. [*Sugestão.* De acordo com (*ii*), a.q.c. $\widetilde{G}$ é tal que, um pouco antes de G_t tornar-se conexo, há, a menos de um componente, somente vértices isolados. Argumente que, a partir deste momento, a.q.c., os vértice isolados são absorvidos um a um pela 'componente gigante'.]

$\{$*Data de entrega*: 14/4/2009$\}$

16. Seja $p = p(n) = c/n$ onde $c > 0$ é uma constante fixa.

    (i) Suponha que $c < 1$. Prove que todas as componentes de $G(n,p)$ têm ordem limitada superiormente por
    $$\frac{1}{\alpha}\log n, \tag{32}$$
    onde $\alpha = c - 1 - \log c$.

    (ii) Suponha agora que $c > 1$, e que já sabemos que a.q.c. $G(n,p)$ contém uma única componente de ordem maior que $(\alpha/2c)n$ (a 'componente gigante'). Prove que todas as *outras* componentes de $G(n,p)$ têm ordem limitada superiormente por (32); isto é, exceto pela componente gigante, todas as componentes têm ordem limitada como em (i).

    $\{$*Data de entrega*: 14/4/2009$\}$

17. [Erdős e Füredi] Para $0 < \theta \leq \pi$, defina
    $$f(\theta; n) = \max |S|, \tag{33}$$
    onde o máximo é tomado sobre todo $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\angle ABC < \theta$ para toda tripla de elementos distintos A, B, e C de S.

    (i) Prove que existe algum $\alpha > 0$ tal que
    $$f(\pi/2; n) \geq (1+\alpha)^n \tag{34}$$
    para todo n suficientemente grande. Encontre o maior α que você conseguir. [*Sugestão.* Para cada $A \subset [n]$, seja $x^A = (x_i^A)_{1\leq i\leq n} \in \{0,1\}^n \subset \mathbb{R}^n$ com $x_i^A = 1$ se e só se $i \in A$. Mostre que $\angle x^A x^B x^C \leq \pi/2$ para quaisquer A, B, e $C \subset [n]$ e que vale a igualdade se e só se $A \cap C \subset B \subset A \cup C$. Sorteie uma família grande de conjuntos $A_\lambda \subset [n]$ $(\lambda \in \Lambda)$ e mostre que os x^{A_λ} correspondentes servem com probabilidade positiva.]

    (ii) Prove que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\beta > 0$ tal que
    $$f(\pi/3 + \varepsilon; n) \geq (1+\beta)^n. \tag{35}$$
    [*Sugestão.* Mostre que os x^{A_λ} em (ii) são, com probabilidade positiva, tais que quaisquer dois tais pontos estão a uma distância euclidiana muito próxima de $\sqrt{n/2}$, mesmo que $|\Lambda|$ seja exponencialmente grande.]

    $\{$*Data de entrega*: 24/4/2009$\}$

18. A sugestão para (ii) do Exercício 17 diz que podemos encontrar uma quantidade exponencialmente grande de pontos no $\mathbb{R}^n$ formando um conjunto *quase-equilátero* (todos os pares do conjunto definem aproximadamente uma mesma distância). Prove que a cardinalidade

máxima de um conjunto *equilátero* no $\mathbb{R}^n$ é $n+1$. Equivalentemente, prove que se $S \subset \mathbb{R}^n$ e, para quaisquer x, $y \in S$ $(x \neq y)$, temos $\|x-y\| = 1$, então $|S| \leq n+1$.

19. [Chebyshev] Sejam $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq \cdots \leq b_n$ reais positivos dados. Sejam $\bar{a} = (1/n)\sum_i a_i$, $\bar{b} = (1/n)\sum_i b_i$ e $\bar{c} = (1/n)\sum_i a_i b_i$ as médias de (a_i), (b_i) e $(a_i b_i)$. Prove que $\bar{a}\bar{b} \leq \bar{c}$. $\{$*Data de entrega*: 28/4/2009$\}$
20. Seja Γ um grafo. Seja $\Gamma_{1/2}$ o subgrafo aleatório de Γ obtido selecionando-se cada aresta de Γ com probabilidade $1/2$, independentemente (o conjunto de vértices de Γ_p é o conjunto de vértices de Γ). Suponha que colorimos cada aresta de Γ de azul ou vermelho, com igual probabilidade, independentemente para cada aresta. Sejam Γ_{azul} e Γ_{vermelho} os grafos sobre $V(\Gamma)$ cujos conjuntos de arestas são o conjunto de arestas azuis e o conjunto de arestas vermelhas, respectivamente.

    Seja P a probabilidade de $\Gamma_{1/2}$ ser conexo e seja Q a probabilidade de ambos Γ_{azul} e Γ_{vermelho} serem conexos. Decida se vale que $Q \leq P^2$. $\{$*Data de entrega*: 28/4/2009$\}$
21. Denotamos o grau máximo $\max\{d(v)\colon v \in V(G)\}$ de um grafo G por $\Delta(G)$. Analogamente, denotamos o grau mínimo $\min\{d(v)\colon v \in V(G)\}$ de G por $\delta(G)$. Considere $G_{1/2} = G(n, 1/2)$, o grafo aleatório de ordem n, cujas arestas estão presentes com probabilidade $1/2$ cada uma, todas de forma independente.
    (i) Suponha que n é par. Prove que $\mathbb{P}(\Delta(G_{1/2}) < n/2) \geq 2^{-n}$.
    (ii) Seja $C > 1$ uma constante fixa. Prove que, a.q.c., temos
    $$\frac{1}{2}n - C\sqrt{n\log n} \leq \delta(G_{1/2}) \leq \Delta(G_{1/2}) \leq \frac{1}{2}n + C\sqrt{n\log n} \qquad (36)$$
    (iii) Dizemos que um grafo G é ε-*quase-grau-regular* (ε-q.g.r.) se
    $$\frac{\Delta(G)}{\delta(G)} \leq 1 + \varepsilon. \qquad (37)$$
    Fixe $\varepsilon > 0$. Deduza que $G_{1/2}$ é a.q.c. ε-q.g.r.
    (iv) Prove que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe C tal que se $p \geq C\log n$, então $G(n,p)$ é, a.q.c., ε-q.g.r.
    (v) Fixe $\varepsilon > 0$ e suponha que $p = p(n) \ll \log n$. Prove que $G(n,p)$ a.q.c. não é ε-q.g.r.

    $\{$*Data de entrega*: 28/4/2009$\}$
22. [Kleitman] Suponha que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, e $\mathcal{I}$ são sistemas de conjuntos sobre o conjunto $X = [n]$, isto é, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, e $\mathcal{I} \subset 2^X = \mathcal{P}(X)$. Suponha ainda que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são "fechados por se tomar subconjuntos" e $\mathcal{H}$ e $\mathcal{I}$ são "fechado por se tomar superconjuntos". Isto é, se $F \subset F' \in \mathcal{F}$, então $F \in \mathcal{F}$ e analogamente para $\mathcal{G}$; analogamente, se $H \subset H'$

e $H \in \mathcal{H}$, então $H' \in \mathcal{H}$ e idem para $\mathcal{I}$. Prove que

$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{G}| \geq 2^{-n}|\mathcal{F}||\mathcal{G}|, \tag{38}$$

$$|\mathcal{H} \cap \mathcal{I}| \geq 2^{-n}|\mathcal{H}||\mathcal{I}|, \tag{39}$$

e

$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{H}| \leq 2^{-n}|\mathcal{F}||\mathcal{H}|. \tag{40}$$

[*Sugestão.* Use alguma desigualdade de correlação.] {*Data de entrega*: 5/5/2009}

23. Dado um grafo G, seja $\chi_3(G)$ o número mínimo de partes em que podemos particionar o conjunto de vértices de G de forma que cada uma das partes não induza triângulos. Equivalentemente, $\chi_3(G) = k$ se podemos colorir os vértices de G com k cores de forma que nenhum triângulo fique monocromático (tenha seus 3 vértices da mesma cor), mas $k-1$ cores não bastam.[1] Prove que, para todo inteiro k, existe um grafo G que não contém K^4, mas temos $\chi_3(G) \geq k$. [*Sugestão.* Considere $G(n,p)$ com $p = \lambda n^{-2/3}$ com $\lambda = \lambda(n)$ apropriado. Use a desigualdade de Janson para mostrar que, com probabilidade $1-o(1)$, conjuntos que não induzem K^3 em $G(n,p)$ são de cardinalidade $o(n)$. Altere $G(n,p)$ de forma apropriada para obter G como no enunciado.] {*Data de entrega*: 5/5/2009}
24. Considere o grafo aleatório $G = G(n, 1/2)$, com conjunto de vértices $[n]$. Defina um hipergrafo 3-uniforme $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G)$ sobre $[n]$ da seguinte forma: uma tripla $\{a,b,c\}$, com $a < b < c$, está presente em $\mathcal{H}$ se e só se *exatamente* um dos pares $\{a,b\}$ e $\{a,c\}$ é uma aresta de G.
    (i) Prove que, para todo $\eta > 0$, a.q.c. temos

    $$\left| e_{\mathcal{H}}(U) - \frac{1}{2}\binom{|U|}{3} \right| \leq \eta n^3 \tag{41}$$

    para todo $U \subset [n]$; isto é, informalmente falando, as triplas de $\mathcal{H}$ estão uniformemente distribuídas.
    (ii) Prove que $\mathcal{H}$ não contém $K_4^{(3)}$, o hipergrafo 3-uniforme completo com 4 vértices.

    {*Data de entrega*: 5/6/2009}
25. Seja G um (n,d,λ)-grafo e $0 < \alpha < 1$. Suponha que H é um subgraph de G com $e(H) \geq \alpha e(G)$.
    (i) Mostre que existe um subgrafo H' de H que tem grau mínimo pelo menos $\alpha d/2$.
    (ii) Sejam $f = (\alpha^2/16)d^2/\lambda^2$ e $b = (\alpha/4)n/f$. Mostre que H' é (b,f)-*expansor*, isto é, todo conjunto U de vértices de H' é tal que sua vizinhança $\Gamma_{H'}(U) = \{w \in V(H') \colon \{u,w\} \in E(H')\}$ é tal que $|\Gamma_{H'}(U)| \geq f|U|$.

[1] Definindo $\chi_2(G)$ de forma análoga, $\chi_2(G) = \chi(G)$, o número cromático usual de G.

(*iii*) Suponha que $\lambda \le C\sqrt{n}$ e que um adversário maliciosamente remove no máximo $(1-\alpha)e(G)$ arestas de G. Mostre que o grafo resultante contém qualquer árvore T com t vértices e grau máximo Δ, desde que $t \le c_1 n$ e $\Delta \le c_2 d$, onde $c_1 = c_1(\alpha, C)$ e $c_2 = c_2(\alpha, C)$ são constantes que dependem apenas de α e C. [*Sugestão.* Use um teorema de Friedman e Pippenger que afirma que todo grafo não-vazio $(2t-2, \Delta+1)$-expansor contém toda árvore com t vértices e grau máximo $\le \Delta$.]

{*Data de entrega*: 9/6/2009}

26. Seja G o grafo sobre $V = 2^{[n]} = \mathcal{P}([n])$ com conjunto de arestas

$$E = \big\{\{f, g\} : f,\, g \subset [n] \text{ com } |f \cap g| \text{ par}\big\}. \tag{42}$$

(*i*) Mostre que, para todo h, existe n_0 tal que se $n \ge n_0$, então G é *h-universal*, isto é, G contém todo grafo com h vértices como subgrafo induzido.

(*ii*) Mostre que, para todo $\eta > 0$, existe n_0 tal que se $n \ge n_0$, então G é tal que, para todo $U \subset V$ com $|U| \ge \eta 2^n$, temos

$$\left| e_G(U) - \frac{1}{2}\binom{|U|}{2} \right| \le \eta \binom{|U|}{2}. \tag{43}$$

{*Data de entrega*: 9/6/2009}

27. Consideramos aqui seqüências de grafos $(G_n)_{n\ge1}$ com $|V(G_n)| \to \infty$ (todos os limites são em relação a $n \to \infty$). Para $k \ge 1$ fixo, seja $\mathcal{H}^{\le k}$ a coleção de todos os grafos conexos H com $2 \le |V(H)| \le k$, a menos de isomorfismo. Dados grafos $G = G^n$ e $H = H^s$, pomos $c_H(G) = (n)_s^{-1} \#\{H \hookrightarrow G\}$; isto é, $c_H(G)$ é a probabilidade de uma injeção aleatória $\iota\colon V(H) \hookrightarrow V(G)$ ser um isomorfismo entre H e o grafo induzido por $G[\iota(V(H))]$. Para cada G, definimos o *k-perfil* de G como sendo o vetor

$$c_{\mathcal{H}^{\le k}}(G) = (c_H(G))_{H \in \mathcal{H}^{\le k}} \in [0,1]^{\mathcal{H}^{(\le k)}} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{H}^{(\le k)}}. \tag{44}$$

Claramente, $c_{\mathcal{H}^{\le k}}(G)$ pode ser pensado como um vetor em $\mathbb{R}^N$, onde $N = |\mathcal{H}^{\le k}|$. Definimos

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}^{\le k}} : \exists (G_n)_{n\ge1} \text{ como acima com } c_{\mathcal{H}^{\le k}}(G) \to \mathbf{x}\}. \tag{45}$$

Um teorema de Erdős, Lovász, e Spencer (1979) diz que S tem interior não-vazio em $\mathbb{R}^{\mathcal{H}^{\le k}}$.

Fixe agora uma constante $0 < p < 1$ e defina a projeção natural $\pi_{\le 4}\colon \mathbb{R}^{\mathcal{H}^{\le k}} \to \mathbb{R}^{\mathcal{H}^{\le 4}}$ dada por

$$\pi_{\mathcal{H}^{\le k}}(\mathbf{x}) = (x_H)_{H \in \mathcal{H}^{\le 4}}, \tag{46}$$

para todo $\mathbf{x} = (x_H)_{H \in \mathcal{H}^{\le k}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}^{\le k}}$. Seja $\mathbf{p} = (p_H)_{H \in \mathcal{H}^{\le 4}}$ o vetor com entradas $p_H = p^{\binom{|V(H)|}{2}}$ para todo $H \in \mathcal{H}^{\le 4}$.

(*i*) Prove que existe um único $\mathbf{x} = \mathbf{x}(p) \in S$ tal que $\pi_{\le 4}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$.

(*ii*) Identifique o vetor $\mathbf{x}(p)$ em (*i*).

(iii) O ponto $\mathbf{x}(p)$ pode pertencer ao interior de S?
[*Sugestão.* Enuncie uma generalização relevante de um resultado de Chung, Graham e Wilson e aplique esta generalização.] {*Data de entrega*: 16/6/2009}

28. Considere o grafo aleatório $G_n = G(n, 1/2)$. Dizemos que o número cromático de G_n *está concentrado em* $L(n)$ *valores* se existem conjuntos $S_n \subset \mathbb{N}$ $(n = 1, 2, \dots)$ tais que $|S_n| \leq L(n)$ para todo n e
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\chi(G_n) \in S_n) = 1. \tag{47}$$
Seja $L(n)$ tal que $L(n)/\sqrt{n} \to \infty$ conforme $n \to \infty$. Prove que $\chi(G_n)$ está concentrado em $L(n)$ valores. [*Sugestão.* Use o teorema de McDiarmid; para cada $1 < i \leq n$, seja $A_i = 2^{[i-1]}$, onde supomos que $V(G_n) = [n]$. Para especificar G_n, especificamos o conjunto $N_i \subset [i-1]$ dos vértices $j < i$ adjacentes a i em G_n.] {*Data de entrega*: 19/6/2009}

29. Sejam dados grafos G e $H_1, \dots, H_r$. Escrevemos $G \xrightarrow{\text{ind}} (H_1, \dots, H_r)$ se vale o seguinte: para qualquer coloração das arestas de G com cores $1, \dots, r$, para algum $1 \leq i \leq r$, um subgrafo induzido H de G isomorfo a H_i tem todas suas arestas coloridas com a cor i.[2] Prove que, para quaisquer r grafos $H_1, \dots, H_r$, existe um grafo G tal que $G \xrightarrow{\text{ind}} (H_1, \dots, H_r)$. [*Sugestão.* Tome para G um grafo quase-aleatório suficientemente grande. Aplique o lema de regularidade de Szemerédi, o teorema de Turán, o teorema de Ramsey, e o lema da imersão de forma adequada.] {*Data de entrega*: 30/6/2009}

[2] Isto é, existe $U \subset V(G)$ tal que o subgrafo $H = G[U] = (U, \binom{U}{2} \cap E(G))$ induzido por U em G é isomorfo a H_i e todas as arestas em $\binom{U}{2} \cap E(G)$ são coloridas com a cor i.