SEGUNDA PROVA DE INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS
2o. SEMESTRE DE 2010

Instruções:

1. Esta prova é individual.
2. Você deve fazer todas as questões.
3. Procure fazer as questões sem nenhuma consulta. Caso você não consiga resolver uma questão e você consulte algum material, você deve citar em detalhe qual material foi consultado.
4. A qualidade da redação será levada em conta para a atribuição de nota.
5. Asserções imprecisas valem pouco. Também valem pouco asserções corretas não-triviais sem justificativa: Justifique suas asserções (dentro do razoável)!

1. Dizemos que um grafo G é (a, b)-*regular* se $a \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq b$. Suponha que $1 \leq k \leq s \leq r$. Prove que todo grafo $(r-k, r)$-regular tem um *fator* $(s-k, s)$-regular, isto é, um subgrafo gerador que é $(s-k, s)$-regular. [*Sugestão.* Suponha $s = r - 1$. Considere um fator $(r-k, r)$-regular minimal. Note que, neste fator, não há dois vértices de grau r adjacentes. Remova um conjunto de arestas independentes cobrindo os vértices de grau r.]
2. Sejam G um grafo e x e y dois vértices de G. Suponha que a distância $d_G(x, y)$ entre x e y em G é $t \geq 2$. Seja
$$\tau_t(x, y) = \min |X|, \tag{1}$$
onde o mínimo é tomado sobre os conjuntos $X \subset V(G) \setminus \{x, y\}$ tais que, se $G' = G - X$, então $d_{G'}(x, y) > t$ (isto é, a remoção de X aumenta a distância entre x e y). Seja
$$\nu_t(x, y) = \max |\mathcal{F}|, \tag{2}$$
onde o máximo é tomado sobre todas as coleções $\mathcal{F}$ de x–y caminhos *mínimos*, dois a dois internamente disjuntos (isto é, conjuntos $\mathcal{F}$ constituídos de x–y caminhos de comprimento t, tais que se P e $P' \in \mathcal{F}$, então $V(P) \cap V(P') = \{x, y\}$). Prove que
$$\tau_t(x, y) = \nu_t(x, y). \tag{3}$$
[*Sugestão.* Estude a versão do teorema de Menger para grafos dirigidos.]
3. Sejam $I_0, I_1, \ldots, I_{rs}$ intervalos da reta real $\mathbb{R}$, onde r e $s \geq 1$ são inteiros. Prove que $r + 1$ desses intervalos têm interseção (total) não-vazia, ou $s + 1$ desses intervalos são dois a dois disjuntos.
4. Seja $P = (X, \leq)$ uma ordem parcial, com X infinito enumerável. Suponha que P não contém anticadeias com mais de t elementos. Mostre que X pode ser escrito como a união de t cadeias em P. [*Sugestão.* Deduza este resultado do teorema de Dilworth, provado para ordens parciais finitas.]
5. Seja G um grafo bipartido com bipartição $V(G) = A \cup B$ e suponha $a = |A| \leq b = |B|$. Suponha que G não contém circuitos de comprimento 4.

Date: Versão de 26 de novembro de 2010 (versão final).

(*i*) Contando triplas da forma $(x,v,w) \in A \times B \times B$ com $\{x,v\}$, $\{x,w\} \in E(G)$, prove que

$$\sum_{x \in A} \binom{d(x)}{2} \le \binom{b}{2}. \tag{4}$$

(*ii*) Deduza que $e(G) \le \max\{2b, a\sqrt{2b}\}$.

6. Seja $f(n)$ o maior r para o qual existem inteiros $1 < s_1 < s_2 < \cdots < s_r \le n$ tais que, para todo i, j, k e l, se $s_i s_j = s_k s_l$, então $\{i,j\} = \{k,l\}$. Seja $\pi(n)$ o número de primos menores ou iguais a n.
   (*i*) Prove que $f(n) \ge \pi(n)$.
   (*ii*) Prove que $f(n) \le \pi(n) + O(n^{7/8})$. [*Sugestão.* Seja $t = \lfloor n^{2/3} \rfloor$. Sejam $A = [t]$ e $B' = [t] \cup P$, onde P é o conjunto dos primos $\le n$. Seja B uma "cópia" de B', disjunta de A (formalmente, poderíamos definir B como sendo $B' \times \{1\}$, mas não seguiremos este formalismo). Prove que todo inteiro $m \le n$ pode ser escrito como ab, com $a \in A$ e $b \in B$ e $a \le b$. Para cada s_i na seqüência dada, fixe uma representação da forma $a_i b_i$ como acima. Considere o grafo bipartido G com bipartição $V(G) = A \cup B$ e conjunto de arestas $E(G) = \big\{\{a_i, b_i\} \colon 1 \le i \le r\big\}$. Prove que G não contém circuitos de comprimento 4. Sejam $B_1 = \{b \colon 1 \le b \le n^{1/2}\}$, $B_2 = \{b \colon n^{1/2} < b \le n^{3/4}\}$ e $B_3 = \{b \colon n^{3/4} < b \le n\}$. Seja E_i ($i \in \{1,2,3\}$) o conjunto de arestas de G que tem uma ponta em B_i. Prove cotas superiores para a cardinalidade dos E_i separadamente, usando o fato de G ser livre de C^4. Observamos que um argumento mais cuidadoso fornece uma cota melhor, a saber, $f(n) \le \pi(n) + O(n^{3/4})$.]
7. Prove que existe um grafo G (finito) com cintura pelo menos 2010 e grau mínimo 2010.