TÓPICOS EM COMBINATÓRIA CONTEMPORÂNEA I

1o. SEMESTRE DE 2017

EXERCÍCIOS

Entrega. Entregue suas soluções no Paca. Soluções entregues fora de prazo valerão menos.

Política de colaboração e uso de fontes. Todo trabalho entregue por você deve ser seu. Você não deve fornecer suas soluções a seus colegas e você não deve procurar soluções de terceiros (como colegas ou na Web). Por outro lado, você é encorajado a discutir com seus colegas o material visto em sala e os enunciados dos exercícios. Caso você acidentalmente encontre a solução de algum exercício em algum lugar, você deve citar esta fonte em sua solução. Caso você acidentalmente acabe colaborando com colegas na descoberta de uma solução, você deve citar esta colaboração em sua solução. Seu desempenho nesta disciplina ficará prejudicado caso você viole essas regras.

1. Prove as seguintes estimativas.
   (*i*) $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (*ii*) $1 + x > \exp\{x - x^2/2\}$ para todo $0 < x \leq 1$.
   (*iii*) $1 - x > \exp\{-x - x^2\}$ para todo $0 < x < x_0$, para algum $x_0 > 0$. De fato, podemos tomar, por exemplo, $x_0 = 0.68$.
   (*iv*) Prove que $1 + x \geq \exp\{x/(1 + x)\}$ para todo $x > -1$.
   [*Sugestão.* Lembre que $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots$ uniformemente se $|x| \leq x_0$ e $x_0 < 1$. Integre ambos os lados para obter
   $$-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\ ] \tag{1}$$
2. Prove as seguintes estimativas para $\binom{a}{b}$, onde a e b são inteiros não-negativos.
   (*i*) Se $a \geq b$, então
   $$\binom{a}{b} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b. \tag{2}$$
   (*ii*) Ademais,
   $$\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}. \tag{3}$$
   (*iii*) Para todo $b > 0$,
   $$\binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{4}$$
   [*Sugestão.* Avalie $(1+x)^a$ por cima e por baixo para $x = b/a$. Use, para tanto, $1+x \leq \mathrm{e}^x$ e o binômio de Newton: $(1 + x)^a \geq \binom{a}{b}x^b$.]

Date: Versão de 2017/6/13, 5:17pm.

(*iv*) Prove a seguinte versão mais forte de (*iii*): se $b \le a$, então

$$\sum_{0\le j\le b} \binom{a}{j} \le \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{5}$$

3. A fórmula de Stirling diz que

$$n! = (1+o(1))\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \tag{6}$$

onde $o(1) \to 0$ conforme $n \to \infty$.

(*i*) Prove que, para todo ℓ fixo, independente de n, temos

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor + \ell} = (1+o(1))2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \tag{7}$$

onde $o(1) \to 0$ conforme $n \to \infty$.

(*ii*) Prove que se $k = k(n) = n/2 + c_n\sqrt{n}$, onde $c_n \to c$ $(n \to \infty)$ e c é uma constante, então

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \sim \frac{d}{\sqrt{n}}2^n, \tag{8}$$

onde $d = d(c) > 0$ é uma constante que depende apenas de c.

(*iii*) Prove que, para todo $0 < \alpha < 1$ fixo, temos

$$\binom{n}{\lfloor \alpha n\rfloor} = \left(\frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right)^{(1+o(1))n}, \tag{9}$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\binom{n}{\alpha n} = H(\alpha), \tag{10}$$

onde $H(\alpha) = \alpha\log(1/\alpha) + (1-\alpha)\log(1/(1-\alpha))$ é a assim chamada função entropia.

4. Sejam $(A_1, B_1), \dots, (A_m, B_m)$ pares de conjuntos finitos com $A_i \cap B_i = \emptyset$ para todo i e com $A_i \cap B_j \ne \emptyset$ ou $A_j \cap B_i \ne \emptyset$ para todos os i e j com $i \ne j$. Ademais, suponha que $|A_i| \le a$ e $|B_i| \le b$ para todo i. Prove que

$$m \le \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}. \tag{11}$$

[*Sugestão.* Prove que, para qualquer $0 < p < 1$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{m} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \le 1. \tag{12}$$

Utilize essa cota para derivar o resultado.] **{*Data de entrega*: 2/4/2017}**

5. [Soma por partes] Sejam $(a_n)_{n\ge1}$ e $(b_n)_{n\ge1}$ duas sequências. Ponha $A_n = \sum_{1\le k\le n} a_n$ $(n \ge 0)$. Prove que

$$\sum_{1\le n\le N} a_n b_n = \sum_{1\le n<N} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_N b_N. \tag{13}$$

6. Seja $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$ uma sequência de inteiros positivos. Lembre que $\underline{\mathbf{d}}(A)$, $\overline{\mathbf{d}}(A)$, $\underline{\boldsymbol{\delta}}(A)$ e $\overline{\boldsymbol{\delta}}(A)$ denotam as densidades naturais e logarítmicas inferiores e superiores de A. Prove que

$$\underline{\mathbf{d}}(A) \le \underline{\boldsymbol{\delta}}(A) \le \overline{\boldsymbol{\delta}}(A) \le \overline{\mathbf{d}}(A). \tag{14}$$

[*Sugestão.* Use soma por partes] ***{Data de entrega: 9/4/2017}***

7. (*i*) Exiba uma sequência $A = \{a_1 < a_1 < \dots\}$ de inteiros positivos que não tem densidade natural (isto é, $\underline{\mathbf{d}}(A) \ne \overline{\mathbf{d}}(A)$).

   (*ii*) Exiba uma sequência $A = \{a_1 < a_1 < \dots\}$ de inteiros positivos que não tem densidade logarítmica (isto é, $\underline{\boldsymbol{\delta}}(A) \ne \overline{\boldsymbol{\delta}}(A)$).

   {Data de entrega: 2/4/2017}

8. Seja $\mathcal{A} \subset \binom{[4s]}{2s}$ um sistema 2-intersectante com $|\mathcal{A}|$ o maior possível. Prove que

$$|\mathcal{A}| = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon(r)\right)\binom{4s}{2s}, \tag{15}$$

onde $\lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$. ***{Data de entrega: 9/4/2017}***

9. Para inteiros $t \le n$, ponha

$$g(n,t) = \max |\mathcal{A}| \tag{16}$$

onde o máximo é tomado sobre todos os $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n]) = 2^{[n]}$ que são *t-intersectantes*, isto é, para todo A e $A' \in \mathcal{A}$, temos $|A \cap A'| \ge t$.

   (*i*) Mostre que $g(n,1) = 2^{n-1}$.

   (*ii*) Mostre que, para todo inteiro $t \ge 2$, temos $g(n,t) = (1+o(1))2^{n-1}$. Isto é, prove que $\lim_{n\to\infty} g(n,t)2^{-n+1} = 1$.

   {Data de entrega: 9/4/2017}

10. Sejam dados uma família t-intersectante $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$ e inteiros $1 \le i < j \le n$. Prove que $s_{ij}(\mathcal{A})$ é t-intersectante.

11. O teorema de Katona sobre famílias t-intersectantes identifica as famílias que atingem o máximo. Prove que de fato tais famílias são as únicas que atingem a cota do teorema.

12. Suponha que colorimos as arestas do grafo completo K^n com k cores e $n > 2^k$. Mostre que há nessa coloração um circuito ímpar monocromático.

13. Suponha que colorimos as arestas do grafo completo K^n de forma que, para cada vértice x, o número de cores distintas que 'ocorrem em x' é no máximo k (uma cor c *ocorre em* x se alguma aresta $\{x,y\}$ tem cor c). Prove que se $n > 2^k$, então há nessa coloração um circuito ímpar monocromático. Deduza o resultado no Ex. 12. [*Sugestão.* Aplique a desigualdade em (12).] ***{Data de entrega: 16/4/2017}***

14. Um grafo orientado $\vec{G}$ é um grafo G munido de uma orientação de suas arestas. Assim, dado G, há $2^{e(G)}$ grafos orientados $\vec{G}$ associados a G, onde $e(G) = |E(G)| \le \binom{v(G)}{2}$ e $v(G) = |V(G)|$. Dizemos que $\vec{G}$ *tem diâmetro* 2 se, para qualquer $(x,y) \in V(G) \times V(G)$, há um caminho orientado de comprimento no máximo 2 de x para y. Prove que, para todo $n \ge 3$, existe um grafo orientado $\vec{G}$ com n vértices e $O(n \log n)$ arcos (um *arco* é simplesmente uma aresta orientada).

15. Prove que todo grafo orientado $\vec{G}$ com n vértices e diâmetro 2 tem pelo menos $\Omega(n \log n)$ arcos. Este resultado vale para grafos não-orientados? [*Sugestão.* Dado $x \in V(\vec{G})$, sejam $N^+(x) = \{y \in V(\vec{G})\colon \vec{xy} \in E(\vec{G})\}$ e $N^-(x) = \{y \in V(\vec{G})\colon \vec{yx} \in E(\vec{G})\}$. Aplique a desigualdade em (12); use a desigualdade de Jensen.] ***{Data de entrega: 16/4/2017}***

16. Seja p um primo e suponha que $\mathcal{A} \subset \binom{[4p]}{2p}$ seja tal que $|A \cap B| \neq p$ para todo A e $B \in \mathcal{A}$ com $A \neq B$. Prove que
$$|\mathcal{A}| \le 2 \sum_{0 \le j < p} \binom{4p}{j}. \tag{17}$$
{Data de entrega: 16/4/2017}

17. (*i*) Seja p um primo. Construa um conjunto X de $\binom{4p}{2p}$ pontos em $\mathbb{R}^{4p-1}$ com a seguinte propriedade: *todo $X' \subset X$ que não contém dois elementos ortogonais é tal que*
$$|X'| \le 2 \sum_{0 \le j < p} \binom{4p}{j}. \tag{18}$$
[*Sugestão.* Considere vetores com coordenadas ± 1 em $\mathbb{R}^{4p}$ com o mesmo número de $+1$s e -1s.]

(*ii*) Use o conjunto X de (*i*) para construir um conjunto $Y \subset \mathbb{R}^d$ que desprova a conjectura de Borsuk (em dimensão suficientemente alta), onde $d = \binom{4p-1}{2}$. [*Sugestão.* Considere a aplicação
$$g\colon (a_{ij})_{1 \le i,j \le 4p-1} \mapsto (a_{ij})_{1 \le i < j \le 4p-1}, \tag{19}$$
que leva matrizes $(4p-1) \times (4p-1)$ em matrizes triangulares superiores.]

(*iii*) Seja $f(d)$ o menor t tal que todo $S \subset \mathbb{R}^d$ com $0 < \operatorname{diam} S < \infty$ admite uma *partição de Borsuk* em t partes, isto é, uma partição em t partes tal que cada parte tem diâmetro menor que $\operatorname{diam}(S)$. Use (*ii*) para provar uma cota inferior exponencial para $f(d)$ para todo d suficientemente grande da forma $d = \binom{4p-1}{2}$, onde p é um primo.

(*iv*) Deduza a partir de (*iii*) uma cota exponencial para $f(d)$ para todo d suficientemente grande. [*Sugestão.* Use o teorema dos números primos.]

{Data de entrega: 16/4/2017}

18. Seja p um primo e n um inteiro com $n > 2p^2$. Seja $V = V_{n,p} = \binom{[n]}{p^2-1}$ e $E = E_{n,p}$ o conjunto de arestas $\{A, B\}$ (A, $B \in V$, $A \neq B$) com $|A \cap B| \not\equiv -1 \pmod{p}$. Seja $G = G_{n,p}$ o grafo $(V, E) = (V_{n,p}, E_{n,p})$. Pomos $h(G) = \max\{\omega(G), \alpha(G)\}$. Isto é, $h(G)$ é a cardinalidade máxima de um conjunto *homogêneo* em G (completo ou vazio). Prove que
$$h(G_{n,p}) \le \sum_{0 \le j < p} \binom{n}{p-1} \le 2\binom{n}{p-1}. \tag{20}$$

19. Fixe $\varepsilon > 0$. Para todo t suficientemente grande, dê uma construção explícita de um grafo $G = G_t$ com pelo menos
$$t^{(1-\varepsilon)(\log t)/4 \log\log t} \tag{21}$$
vértices e com $h(G) \le t$. [*Sugestão.* Escolha $n = p^3$ no resultado no Ex. 18; use to teorema dos números primos.]

20. Seja T uma árvore com raiz r e infinitos vértices.[1] Suponha também que T seja *localmente finito*, isto é, que todo vértice de T tenha grau finito. Prove que T tem um caminho infinito da forma $(r, x_1, x_2, \dots)$.
21. Seja G um grafo infinito. Suponha que os números cromáticos dos subgrafos finitos de G sejam uniformemente limitados, isto é, que haja um inteiro q tal que $\chi(H) \le q$ para todo subgrafo finito H de G.
    (*i*) Prove que $\chi(G) \le q$ supondo que $V(G)$ é enumerável. **{*Data de entrega*: 25/4/2017}**
    (*ii*) Prove que $\chi(G) \le q$. [*Sugestão.* Use o teorema de Tychonoff. Considere $[q]$ como um espaço topológico discreto e considere $X = \prod_{v \in V(G)} [q]$ com a topologia produto.]
22. Seja $d \ge 0$ um inteiro e $\varepsilon > 0$ um número real. Seja $B(d, \varepsilon)$ o grafo infinito com conjunto de vértices $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \colon \|x\| = 1\}$ e conjunto de arestas

$$\big\{\{x, y\} \colon x,\, y \in S^d \text{ e } \langle x, y\rangle \le -1 + \varepsilon\big\}. \tag{22}$$

    (*i*) Prove que $\chi(B(d, \varepsilon)) \ge d + 2$.
    (*ii*) A *cintura ímpar* $\mathrm{og}(G)$ de um grafo G é o comprimento de um circuito ímpar mais curto em G, isto é,

$$\mathrm{og}(G) = \min\{|V(C)| \colon C \text{ circuito de comprimento ímpar em } G\}. \tag{23}$$

    Prove que $\mathrm{og}(B(d, \varepsilon)) \ge f(\varepsilon)$ para alguma função f com $\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = \infty$.
    (*iii*) Podemos medir o 'tamanho' de conjuntos U de vértices de $B(d, \varepsilon)$ usando a *medida normalizada* $\mu(U)$, pelo menos para conjuntos U mensuráveis. Aqui, $\mu(U) = \mathrm{vol}(U)/\mathrm{vol}(S^d)$, onde $\mathrm{vol}(X) = \mathrm{vol}_d(X)$ denota o volume d-dimensional de X ($X \subset S^d$ mensurável). Por exemplo, para $x \in S^d$ e $0 \le h \le 2$, seja

$$C_h(x) = \{z \in S^d \colon \langle z, x\rangle \ge 1 - h\} \tag{24}$$

    o *domo esférico* de S^d centrado em x e de altura h. Então

$$\mu(C_h(x)) = c_d \int_0^{\arccos(1-h)} (\sin\theta)^{d-1}\, d\theta, \tag{25}$$

    onde $c_d > 0$ é uma constante apropriada para que $\mu(C_2(x)) = \mu(S^d) = 1$ para qualquer $x \in S^d$. Podemos definir $\alpha(B(d, \varepsilon)) = \sup\{\mu(U) \colon U \text{ independente em } B(d, \varepsilon)\}$. Prove que $\alpha(B(d, \varepsilon)) \ge g(\varepsilon)$ para alguma função g com $\lim_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon) = 1/2$.
23. Sejam q e ℓ inteiros arbitrários. Prove que existe um grafo finito G tal que $\chi(G) \ge q$ e $\mathrm{og}(G) \ge \ell$. **{*Data de entrega*: 25/4/2017}**
24. Seja $G = K(n, k)$ o grafo de Kneser com parâmetros n e k com $n > 2k \ge 2$. Prove que

$$\mathrm{og}(G) = 1 + 2\left\lceil \frac{k}{n - 2k} \right\rceil. \tag{26}$$

    Quanto é a cintura de G? (A cintura $g(G)$ de G é $\min\{|V(C)| \colon C \text{ circuito em } G\}$.)

[1] Neste e exercício e nos Exs 21 e 22 consideramos grafos infinitos. Todos os nossos grafos são finitos, a menos de menção contrária explícita.

25. Sejam dados q e ℓ inteiros e $\varepsilon > 0$ um número real. Prove que existe um grafo G tal que $\chi(G) \geq q$, $\mathrm{og}(G) \geq \ell$ e $\alpha(H) \geq (1/2 - \varepsilon)|V(H)|$ para todo subgrafo H de G. Qual é o número cromático de um grafo G tal que $\alpha(H) \geq (1/2)|V(H)|$ para todo subgrafo H de G?
{*Data de entrega*: 2/5/2017}

26. Seja G um grafo. Seja $\mathcal{I} = \mathcal{I}(G) = \{I \subset V(G)\colon I \text{ conjunto independente em } G\}$ a família dos conjuntos independentes de vértices em G. Uma *coloração fracionária* de G é uma função não-negativa $x\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $v \in V(G)$,
$$\sum\{x(I)\colon v \in I \in \mathcal{I}(G)\} \geq 1. \tag{27}$$
Seja $\mathrm{val}(x) = \sum_{I \in \mathcal{I}(G)} x(I)$. O *número cromático fracionário* $\chi_f(G)$ de G é dado por
$$\chi_f(G) = \min\{\mathrm{val}(x)\colon x \text{ coloração fracionária de } G\}. \tag{28}$$
   (*i*) Prove que
$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \chi_f(G) \leq \chi(G). \tag{29}$$
   (*ii*) Seja $G = K(n,k)$ o grafo de Kneser com parâmetros n e k com $n \geq 2k \geq 2$. Prove que $\chi_f(G) = n/k$.

{*Data de entrega*: 30/4/2017}

27. Seja $(\Omega, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade em que estão definidas k variáveis independentes $X_1, \ldots, X_k$ não constantes, isto é, tais que, para todo i e c, temos $\mathbb{P}(X_i = c) < 1$. Prove que $|\Omega| \geq 2^k$. **{*Data de entrega*: 7/5/2017}**

28. Fixe $n \geq k \geq 2$. Construa n variáveis aleatórias uniformes e k-a-k independentes $X_1, \ldots, X_n$ não-constantes definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$ com $|\Omega| \leq (2n)^k$. [*Sugestão.* Fixe um primo $p \geq n$ e considere $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Seja $k = d + 1$. Seja $\gamma(t) = (1, \ldots, t^d)$ e fixe n elementos distintos $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{F}_p$. Seja $X_i = \langle \gamma(t_i), Y \rangle$ $(1 \leq i \leq n)$ com $Y = (Y_j)_{0 \leq j \leq d}$ onde Y_j é uniforme e independentemente sorteado de $\mathbb{F}_p$.] **{*Data de entrega*: 7/5/2017}**

29. Seja H um grafo. Tome
$$q(H) = \sup\{\chi(G)\colon G \text{ grafo sem cópias de } H \text{ como subgrafo}\}. \tag{30}$$
   (*i*) Prove que $q(H) = \infty$ se H não é uma floresta (isto é, se H contém circuitos).
   (*ii*) Prove que $q(H) < \infty$ se H é uma floresta. Encontre uma cota superior explícita para $q(H)$ neste caso

{*Data de entrega*: 14/5/2017}

30. Sejam k e $\ell \geq 3$ inteiros. Prove que existe um grafo G com $\chi(G) \geq k$, $g(G) > \ell$ e
$$|V(G)| \leq \big(30(\log \ell)(\log(30k))\ell^2 k\big)^{\ell}. \tag{31}$$
[*Sugestão.* Veja as notas de aula de 28/4/2017] **{*Data de entrega*: 14/5/2017}**

31. Reescreva a prova de Turán do teorema de Hardy e Ramanujan sobre o número de divisores primos distintos de um inteiro sem usar o teorema dos números primos. [*Sugestão.* Lembre que, para um primo p, consideramos $X_p = \mathbb{1}_{\{p|m\}}$. Se $X' = \sum_{p \leq \sqrt{n}} X_p$ e $X = \sum_{p \leq n} X_p$, temos $X' \leq X \leq X' + 1$.]

32. Seja $\Omega(m)$ o número de divisores primos de m, contados com multiplicidade (de forma que $\Omega(12) = 3$ enquanto que $\omega(12) = 2$). Seja $\alpha = \alpha(n)$ qualquer função com $\alpha \to \infty$ quando $n \to \infty$. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{m\in \mathrm{U}[n]} \Big(|\Omega(m) - \log\log n| \geq \alpha\sqrt{\log\log n} \Big) = 0. \tag{32}$$

[*Sugestão.* Seja $X_{p^k} = \mathbb{1}_{\{p^k|m\}}$ Note que $\Omega(m) = \sum_{p,k} X_{p^k}(m)$. Prove que

$$\sum_{k\geq 2,\, p \text{ primo}} \frac{1}{p^k} = \sum_p \frac{1}{p(p-1)} < \infty,$$

de forma que $\mathbb{E}_{m\in\mathrm{U}} \big(\Omega(m) - \omega(m)\big) = O(1)$ e conclua que $\mathbb{P}_{m\in\mathrm{U}[n]} \big(\Omega(m) - \omega(m) \geq \beta(n)\big) = o(1)$ para qualquer $\beta = \beta(n) \to \infty$.]

33. Fixe n e suponha $m \in [n]$. Seja $t_*(m)$ um valor real t com a seguinte propriedade:

$$\big|\{p\colon p \text{ divisor primo de } m \text{ com } p \leq t\}\big| \geq \frac{1}{2}\omega(m) \tag{33}$$

e

$$\big|\{p\colon p \text{ divisor primo de } m \text{ com } p \geq t\}\big| \geq \frac{1}{2}\omega(m) \tag{34}$$

Prove que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que vale a seguinte afirmação: para todo $n \geq n_0$, temos que para pelo menos $(1-\varepsilon)n$ valores de $m \in [n]$, temos

$$\mathrm{e}^{(\log m)^{1/2-\varepsilon}} \leq t_*(m) \leq \mathrm{e}^{(\log m)^{1/2+\varepsilon}}. \tag{35}$$

[*Sugestão.* Seja $\omega(m,t)$ o número de divisores primos distintos p de m com $p \leq t$. Estude o comportamento típico de $\omega(m,t)$ para $m \in [n]$.] **{*Data de entrega*: 21/5/2017}**

34. Prove que $p = 3^{-n/2}$ é uma função limiar para a propriedade de $\mathcal{F} = (2^{[n]})_p$ ser uma família de Sperner, isto é, ser tal que não há A e $B \in \mathcal{F}$ com $A \subset B$ e $A \neq B$. [*Observação.* Lembre que se U é um conjunto finito e $0 \leq p \leq 1$, denotamos por U_p um subconjunto aleatório binomial de U, isto é, $\mathbb{P}(U_p = T) = p^{|T|}(1-p)^{|U|-|T|}$. Como "ser Sperner" é uma propriedade decrescente, naturalmente queremos provar que se $p \ll 3^{-n/2}$, então $\lim_n \mathbb{P}(\mathcal{F} \text{ Sperner}) = 1$ e se $p \gg 3^{-n/2}$, então esse limite é 0.] **{*Data de entrega*: 21/5/2017}**

35. Tome $p = 3/n$ e considere $G(n,p)$. Seja X o número de circuitos hamiltonianos em $G(n,p)$. Mostre que $\mathbb{E}(X) \to \infty$ conforme $n \to \infty$. Mostre também que $G(n,p)$ não tem circuito hamiltoniano com probabilidade tendendo a 1 conforme $n \to \infty$. Repita o mesmo para

$$p = \frac{1}{n}(\log n + \log\log n + \alpha), \tag{36}$$

onde $\alpha = \alpha(n)$ é uma função arbitrária tal que $\alpha \to -\infty$ conforme $n \to \infty$. **{*Data de entrega*: 21/5/2017}**

36. Se A, B e C são três pontos em $\mathbb{R}^d$, com $A \neq B$ e $A \neq C$, então os vetores $B - A$ e $C - A$ definem um ângulo $\theta(A,B,C)$ no ponto A. Aqui consideramos $\theta(A,B,C) \in [0,\pi]$. Se $S \subset \mathbb{R}^d$ e $\theta > 0$, dizemos que S é um *θ-conjunto* se, para quaisquer três elementos distintos A, B e C em S, temos $\theta(A,B,C) \leq \theta$. Seja dado θ e tome

$$f_{\leq\theta}(d) = \max\{|S|\colon S \subset \mathbb{R}^d \text{ é um } \theta\text{-conjunto}\}. \tag{37}$$

(i) Determine $f_{\leq \pi/3}(d)$.

(ii) Prove que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f_{\leq \pi/3+\varepsilon}(d) \geq (1+\delta)^d. \tag{38}$$

{Data de entrega: 28/5/2017}

37. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} \tag{39}$$

para todo i. Seja $S_n = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$. Prove que, para qualquer $a > 0$, temos

$$\mathbb{P}(S_n > a) < \mathrm{e}^{-a^2/2n}. \tag{40}$$

[*Sugestão.* Veja, por exemplo, Alon e Spencer (2000), Apêndice A.]

38. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz. Para I um conjunto de linhas de A e J um conjunto de colunas de A, seja $s_A(I,J) = \mathbb{1}_I^T A \mathbb{1}_J = \sum_{i \in I,\, j \in J} a_{ij}$. Vamos dizer que A é *α-limitada* se $|s_A(I,J)| \leq \alpha\sqrt{|I||J|}$ para todo I e J. Seja A uma matriz aleatória $n \times n$ com entradas $+1$ e -1 independentes com

$$\mathbb{P}(a_{ij} = -1) = \mathbb{P}(a_{ij} = 1) = \frac{1}{2} \tag{41}$$

para todo i e j. Prove que, com probabilidade tendendo a 1 conforme $n \to \infty$, a matriz A é $c\sqrt{n}$-limitada para qualquer constante $c > 2\sqrt{\log 2}$. [*Sugestão.* Use o Ex. 37.] ***{Data de entrega: 31/5/2017}***

39. Dada uma matriz B, vamos denotar aqui a i-ésima linha de B por B_i. Como no Ex. 38, para I um conjunto de linhas e J um conjunto de colunas de $B = (b_{ij})$, seja $s_B(I,J) = \mathbb{1}_I^T B \mathbb{1}_J = \sum_{i \in I,\, j \in J} b_{ij}$. Seja B uma matriz $n \times n$ com entradas $+1$ e -1 cujas linhas são ortogonais: $\langle B_i, B_{i'} \rangle = 0$ para quaisquer $i \neq i'$. Prove que $|s_B(I,J)| \leq \sqrt{n|I||J|}$ para quaisquer I e J. [*Sugestão.* Note que $s_B(I,J) = \left\langle \sum_{i \in I} B_i, \mathbb{1}_J \right\rangle$ e aplique Cauchy–Schwarz. Para estimar $\|\sum_I B_i\|$, lembre que os B_i são ortogonais.] ***{Data de entrega: 4/6/2017}***

40. Dê uma construção explícita para grafos $(\varrho, o(1))$-uniformes para alguma constante $0 < \varrho < 1$. Mais precisamente, dê uma construção explícita de grafos $G = G^n$ arbitrariamente grandes que sejam $(\varrho, o(1))$-uniformes, isto é, que sejam $(\varrho, f(n))$-uniformes para alguma função $f(n)$ com $\lim_n f(n) = 0$. [*Sugestão.* Antes de ler esta sugestão, tente encontrar uma tal construção explícita seriamente. Não encontrando, continue a ler. Fixe t e seja $n = 2^t$. Considere o grafo $G = G^n$ com conjunto de vértices $\mathcal{P}([t]) = 2^{[t]}$ definido a seguir. Se x e $y \subset [t]$ são distintos, coloque a aresta $\{x,y\}$ em G se $|x \cap y|$ for ímpar. Prove que G é $(1/2, \sqrt{n}/2)$-bijumbled (para tanto, considere uma matriz B com entradas em $\{-1,1\}$ adequada, indicando as adjacências em G (as linhas e colunas de G devem ser indexadas por $V(G)$). Defina B de forma que você possa aplicar o resultado no Ex. 39).] ***{Data de entrega: 7/6/2017}***

41. Resolva o Ex. 40, mas agora para alguma função $\varrho = \varrho(n) = o(1)$. [*Sugestão.* Fixe um corpo finito $\mathbb{F}$. Considere $V = \mathbb{F}^3 \setminus \{0\}/\!\sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência em $\mathbb{F}^3 \setminus \{0\}$ em que (x_0, x_1, x_2) é equivalente a (x_0', x_1', x_2') se e só se existe $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ tal que $(x_0', x_1', x_2') =$

$\lambda(x_0, x_1, x_2)$. Denote a classe de (x_0, x_1, x_2) por $[x_0, x_1, x_2]$. Defina o grafo G sobre V declarando dois elementos distintos $[x_0, x_1, x_2]$ e $[x_0', x_1', x_2']$ adjacentes se e só se $x_0x_0' + x_1x_1' + x_2x_2' = 0$. Defina uma matriz adequada como na sugestão do Ex. 40 e aplique uma generalização do resultado no Ex. 39, válida para matrizes com linhas ortogonais em que as entradas não precisar ser de $\{-1, 1\}$).] ***{Data de entrega*: 11/6/2017}**

42. Prove a seguinte versão do lema de regularidade de Szemerédi: *Para quaisquer $\varepsilon > 0$, k_0 e $r \geq 1$, existem $n_0 = n_0(\varepsilon, k_0, r)$ e $K = K(\varepsilon, k_0, r)$ para os quais vale o seguinte. Sejam $G_1, \dots, G_r$ grafos quaisquer sobre um mesmo conjunto de vértices V com $|V| = n \geq n_0$. Então existe uma partição de V com partes $C_0, \dots, C_k$ que é ε-balanceada e ainda tal que, para pelo menos $(1-\varepsilon)\binom{k}{2}$ pares (C_i, C_j) com $1 \leq i < j \leq k$, vale que (C_i, C_j) é simultaneamente ε-regular em relação a cada um dos r grafos G_σ $(1 \leq \sigma \leq r)$.* (Note que, assim, a partição é ε-regular em relação a todos os G_σ.) [*Sugestão.* Use o fato que o lema de regularidade pode ser provado exigindo-se que a partição resultante seja um refinamento de uma partição dada (isto é, de forma que toda classe não excepcional da partição resultante esteja contida em alguma parte da partição dada). Alternativamente, lembre que na prova que vimos do lema de regularidade, usamos a quantidade $\|A_P\|_{\mathrm{F}}^2$ para mostrar que um certo processo de refinamento sucessivo termina com uma partição regular do grafo dado (a quantidade $\|A_P\|_{\mathrm{F}}^2$ é também conhecida como o *índice* da partição P). Sendo dados r grafos $G_1, \dots, G_r$, use a quantidade $\|A_1\|_{\mathrm{F}}^2 + \cdots + \|A_r\|_{\mathrm{F}}^2$, onde A_σ é a matriz de adjacência de G_σ.]

43. Sejam dados grafos G e $H_1, \dots, H_r$. Escrevemos $G \xrightarrow{\text{ind}} (H_1, \dots, H_r)$ se vale o seguinte: para qualquer coloração das arestas de G com cores $1, \dots, r$, para algum $1 \leq i \leq r$, um subgrafo induzido H de G isomorfo a H_i tem todas suas arestas coloridas com a cor i.[2] Prove que, para quaisquer r grafos $H_1, \dots, H_r$, existe um grafo G tal que $G \xrightarrow{\text{ind}} (H_1, \dots, H_r)$. [*Sugestão.* Tome para G o grafo aleatório $G(n, 1/2)$. Use o lema de regularidade de Szemerédi, o teorema de Turán, o teorema de Ramsey, e use um lema da imersão adequado.] ***{Data de entrega*: 22/6/2017}**

[2]Isto é, existe $U \subset V(G)$ tal que o subgrafo $H = G[U] = (U, \binom{U}{2} \cap E(G))$ induzido por U em G é isomorfo a H_i e todas as arestas em $\binom{U}{2} \cap E(G)$ estão coloridas com a cor i.