MÉTODOS PROBABILÍSTICOS EM COMBINATÓRIA E EM TEORIA DA COMPUTAÇÃO I

2o SEMESTRE DE 2020

EXERCÍCIOS

Entrega. Entregue suas soluções no e-Disciplinas. Soluções entregues fora de prazo valerão menos.

Política de colaboração e uso de fontes. Todo trabalho entregue por você deve ser seu. Você não deve fornecer suas soluções a seus colegas e você não deve procurar soluções de terceiros (como colegas ou na Web). Por outro lado, você é encorajado a discutir com seus colegas o material visto em sala e os enunciados dos exercícios. Caso você acidentalmente encontre a solução de algum exercício em algum lugar, você deve citar esta fonte em sua solução. Caso você acidentalmente acabe colaborando com colegas na descoberta de uma solução, você deve citar esta colaboração em sua solução. Seu desempenho nesta disciplina ficará prejudicado caso você viole essas regras.

1. Prove as seguintes estimativas.
   (*i*) $1+x \le \mathrm{e}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (*ii*) $1+x > \exp\{x - x^2/2\}$ para todo $0 < x \le 1$.
   (*iii*) $1-x > \exp\{-x-x^2\}$ para todo $0 < x < x_0$, para algum $x_0 > 0$. De fato, podemos tomar, por exemplo, $x_0 = 0.68$.
   (*iv*) Prove que $1+x \ge \exp\{x/(1+x)\}$ para todo $x > -1$.
   [*Sugestão.* Lembre que $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$ uniformemente se $|x| \le x_0$ e $x_0 < 1$. Integre ambos os lados para obter
$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\ ] \tag{1}$$

2. Prove que, para todo inteiro $n \ge 1$, temos
$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \le n! \le n\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{2}$$

3. Prove as seguintes estimativas para $\binom{a}{b}$, onde a e b são inteiros não-negativos.
   (*i*) Se $a \ge b$, então
$$\binom{a}{b} \ge \left(\frac{a}{b}\right)^b. \tag{3}$$
   (*ii*) Ademais,
$$\binom{a}{b} \le \frac{a^b}{b!}. \tag{4}$$
   (*iii*) Para todo $b > 0$,
$$\binom{a}{b} \le \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{5}$$
   [*Sugestão.* Avalie $(1+x)^a$ por cima e por baixo para $x = b/a$. Use, para tanto, $1 + x \le \mathrm{e}^x$ e o binômio de Newton: $(1+x)^a \ge \binom{a}{b}x^b$.]

Date: Versão de 2020/12/15, 4:03pm.

(*iv*) Prove a seguinte versão mais forte de (*iii*): se $b \le a$, então

$$\sum_{0\le j\le b}\binom{a}{j} \le \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{6}$$

4. A fórmula de Stirling diz que

$$n! = (1+o(1))\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}, \tag{7}$$

onde $o(1)\to 0$ conforme $n\to\infty$.

(*i*) Prove que, para todo ℓ fixo, independente de n, temos

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor+\ell} = (1+o(1))2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \tag{8}$$

onde $o(1)\to 0$ conforme $n\to\infty$.

(*ii*) Prove que se $k = k(n) = n/2 + c_n\sqrt{n}$, onde $c_n \to c$ $(n\to\infty)$ e c é uma constante, então

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \sim \frac{d}{\sqrt{n}}2^n, \tag{9}$$

onde $d = d(c) > 0$ é uma constante que depende apenas de c.

(*iii*) Prove que, para todo $0<\alpha<1$ fixo, temos

$$\binom{n}{\lfloor \alpha n\rfloor} = \left(\frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right)^{(1+o(1))n}, \tag{10}$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\binom{n}{\alpha n} = H(\alpha), \tag{11}$$

onde $H(\alpha) = \alpha\log(1/\alpha) + (1-\alpha)\log(1/(1-\alpha))$ é a assim chamada função entropia.

5. Prove que toda função booleana $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ pode ser expressa for uma fórmula $\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ de comprimento $O(2^n)$. **{*Data de entrega*: 9/9/2020}**

6. Seja $\varphi = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ uma fórmula booleana da forma

$$\varphi = \bigwedge_{1\le i\le t} C_i, \tag{12}$$

com $C_i = \ell_{i1}\vee\ell_{i2}\vee\ell_{i3}$ para todo i, onde os ℓ_{ij} são literais, isto é, cada ℓ_{ij} é uma variável x_k ou sua negação $\neg x_k$. Adicionalmente, suponha que, para cada i, as três variáveis que ocorrem em C_i são distintas. Prove que existe uma atribuição de valores para as variáveis $x_1,\dots,x_n$ que satisfaz pelo menos $7t/8$ dos C_i. **{*Data de entrega*: 9/9/2020}**

7. Para $f\colon\{0,1\}^n\to\{0,1\}$, seja $L(f) = \min_\varphi|\varphi|$, onde o mínimo é tomado sobre todas as fórmulas booleanas φ que expressam f. Prove que, para todo $\varepsilon>0$, quase todas as funções f como acima[1] são tais que $L(f)\ge(1-\varepsilon)2^n/\log_2(n+8)$.

8. Seja $(\Omega,\mathbb{P})$ um espaço de probabilidade finito. Suponha que haja n eventos independentes $A_1,\dots,A_n\subset\Omega$ com $0<\mathbb{P}(A_i)<1$ para todo i. Prove que $|\Omega|\ge 2^n$. **{*Data de entrega*: 16/9/2020}**

9. Sejam X e Y variáveis aleatórias sobre um espaço de probabilidade $(\Omega,\mathbb{P})$. Prove que $\mathbb{E}(XY)^2\le\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$.

[1]isto é, para $(1-o(1))2^{2^n}$ dessas funções, onde $o(1)\to 0$ quando $n\to\infty$

10. Um circuito hamiltoniano em um grafo G de ordem n é uma ordenação $(x_1, \ldots, x_n)$ de seus vértices de forma que $x_{i-1}x_i \in E(G)$ para todo $1 < i \le n$ e $x_n x_1 \in E(G)$. Seja X o número de circuitos hamiltonianos no grafo aleatório $G(n,p)$ e seja η uma constante positiva.
   (*i*) Prove que $\mathbb{E}(X) \to \infty$ se $p \ge (\mathrm{e}+\eta)/n$ e que que $\mathbb{E}(X) \to 0$ se $p \le (\mathrm{e}-\eta)/n$.
   (*ii*) Decida se $p = \mathrm{e}/n$ é a função limiar para a propriedade de $G(n,p)$ ter um circuito hamiltoniano.
   {*Data de entrega*: 16/9/2020}
11. Determine a função limiar para a propriedade de $G(n,p)$ conter H como subgrafo nos seguintes casos.
   (*i*) H é uma árvore.
   (*ii*) H é um grafo completo.
   (*iii*) H é o grafo de Petersen.
   {*Data de entrega*: 23/9/2020}
12. Seja $\Gamma = [n] \times [n] = [n]^2$. Um *quadrado* em Γ é uma quádrupla $Q = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset \Gamma$ com $x_2 = x_1 + (a, 0)$, $x_3 = x_1 + (a, b)$ e $x_4 = x_1 + (0, b)$, onde a e b são inteiros positivos quaisquer (assim, Q é formado pelos quatro vértices de um quadrado alinhado com os eixos). Seja $\mathcal{P} \subset 2^\Gamma$ a família dos conjuntos $S \subset \Gamma$ que contêm quadrados. Seja $0 \le p = p(n) \le 1$ e considere Γ_p. Determine a função limiar para a propriedade de Γ_p conter um quadrado. **{*Data de entrega*: 23/9/2020}**
13. Seja $\widetilde{\omega}(n)$ o número de divisores primos de n, contando multiplicidades: $\widetilde{\omega}(n) = \sum_{p^a|n} 1 = \sum_{p^a \| n} a$. Seja $\tau(n)$ o número de divisores de n: $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. Suponha que $n \in_{\mathrm{U}} [N]$ (isto é, suponha que n seja escolhido aleatoriamente em $[N]$, uniformemente ao acaso).
   (*i*) Prove que $\mathbb{E}(\widetilde{\omega}(n)) = \log\log N + O(1)$.
   (*ii*) Prove que $\mathbb{E}(\tau(n)) = \log N + O(1)$.
   {*Data de entrega*: 30/9/2020}
14. Deduza do teorema de Hardy e Ramanujan que o valor típico de $\omega(n)$ é $\log\log n$. [Para provar essa afirmação, você precisa provar o seguinte: para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $S_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \colon |\omega(n) - \log\log n| \le \varepsilon \log\log n\}$ tem densidade 1.] **{*Data de entrega*: 30/9/2020}**
15. Sejam dados $\ell \ge 3$ e $\varepsilon > 0$. Prove que, para todo $k \ge k_0(\ell, \varepsilon)$, existe um grafo G com $n \le k^{(1+\varepsilon)\ell}$ vértices tal que $\chi(G) > k$ e $g(G) > \ell$.
16. Seja G um grafo com $g(G) > \ell$ e $|V(G)| < k^{\lfloor \ell/2 \rfloor}$. Prove que $\chi(G) \le k$.
17. Seja G um hipergrafo k-uniforme com $\chi(G) > 2$. Prove que existem duas hiperarestas e e $f \in E(G)$ com $|e \cap f| = 1$.
18. Seja G um grafo. Prove que $\alpha(G) \ge \sum_{x \in V(G)} 1/(d(x)+1)$, onde $d(x)$ é o grau de x em G. [*Sugestão.* Considere uma ordenação aleatória $(x_1, \ldots, x_n)$ de $V(G)$, com todas as $n!$ possíveis permutações igualmente prováveis. Considere o conjunto $S = \{x_i \colon \text{se } x_i x_j \in E(G), \text{ então } i < j\}$.]
19. Deduza do Ex. 18 que $\alpha(G) \ge |V(G)|/(\bar{d}(G)+1)$. [*Sugestão.* Note que $f(x) = 1/(x+1)$ é convexa e aplique a desigualdade de Jensen.]
20. Seja $\ell \ge 3$ um inteiro. Seja G um grafo com $\bar{d}(G) \ge 2\Delta(G)^{1-1/\ell}$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo em G. Suponha adicionalmente que $\Delta(G) \ge 4^\ell$. Prove que G contém um subgrafo H com $g(H) > \ell$ e $\bar{d}(H) \ge \bar{d}(G)\Delta(G)^{1/\ell-1}/4$. [*Sugestão.* Tome $p =$

$\Delta(G)^{1/\ell-1}/2$ e considere o subgrafo aleatório $J = G_p = (V(G), E(G)_p)$.] **{*Data de entrega*: 7/10/2020}**

21. Dizemos que um grafo G é $[a,b]$-*regular* se $a \leq d(x) \leq b$ para todo vértice x de G, onde $d(x)$ é o grau de x em G. Sejam dados k e ℓ. Prove que existe $r_0 = r_0(k,\ell)$ tal que, para todo $r \geq r_0$, todo grafo $[r, r(\log r)^{2020}]$-regular tem um subgrafo H com $\bar{d}(H) \geq k$ e $g(H) > \ell$. [*Sugestão.* Use o Ex. 20. A função $(\log r)^{2020}$ pode ser substituída por qualquer função $\omega = \omega(r)$ com $\log \omega = o(\log r)$.] **{*Data de entrega*: 7/10/2020}**
22. Lembre que $M(n,k,l)$ é a cardinalidade mínima de uma família de k-subconjuntos de $[n]$ que cobre todos os l-subconjuntos de $[n]$. Deduza do teorema de Frankl e Rödl/Pippenger e Füredi (Teorema 9.9) que, para quaisquer $l < k$ e $\eta > 0$ fixos, existe $n_0 = n_0(l,k,\eta)$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $M(n,k,l) \leq (1+\eta)\binom{n}{l}\binom{k}{l}^{-1}$.
23. Lembre que $m(n,k,l)$ é a cardinalidade máxima de uma família $\mathcal{P}$ de k-subconjuntos de $[n]$ tal que, para quaisquer A e $B \in \mathcal{P}$ distintos, temos $|A \cap B| < l$. A conjectura de Erdős e Hajnal (1963) diz que
$$\lim_{n\to\infty} M(n,k,l)\binom{k}{l}\binom{n}{l}^{-1} = \lim_{n\to\infty} m(n,k,l)\binom{k}{l}\binom{n}{l}^{-1} = 1. \tag{13}$$
   (*i*) Prove que ambos os limites em (13) existem.
   (*ii*) Prove que um dos limites em (13) é 1 se e só se o outro limite em (13) também é 1.
24. Suponha que exista uma configuração tática com parâmetros (n,k,l) (veja a Definição 9.2). Prove que
$$\binom{n-t}{l-t}\binom{k-t}{l-t}^{-1} \tag{14}$$
é inteiro para qualquer $0 \leq t \leq l$.
25. Um n-*empacotamento* de um grafo H é uma coleção $\mathcal{P} = \{H_1, \ldots, H_t\}$ de subgrafos H_i de um grafo completo K^n fixo, com H_i isomorfo a H para todo i e $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. O *tamanho* de um tal empacotamento $\mathcal{P}$ é $|\mathcal{P}|$.
   (*i*) Encontre um 5-empacotamento de C^5 (o circuito de comprimento 5) de tamanho 2.
   (*ii*) Seja $p_{C^4}(n)$ o tamanho máximo de um n-empacotamento de C^4. Determine $p_{C^4}(n)$ assintoticamente, isto é, encontre uma função $f(n)$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} p_{C^4}(n)/f(n) = 1 \tag{15}$$
   (Naturalmente, prove que (13) vale para sua função $f(n)$.)
   (*iii*) Seja H um grafo arbitrário e defina $p_H(n)$ de forma análoga. Generalize seu resultado de (*ii*). Neste item, basta esboçar as demonstrações.

   {*Data de entrega*: 14/10/2020}
26. Neste exercício, generalizamos a noção n-empacotamento do Exercício 25: em vez de considerarmos subgrafos aresta-disjuntos de K^n, consideramos subgrafos aresta-disjuntos de um grafo arbitrário G. Chamamos tais empacotamentos de G-*empacotamentos* de H e definimos $p_H(G)$ de forma análoga a $p_H(n)$. Consideramos o caso em que G é o grafo aleatório $G(n,p)$.
   (*i*) Prove que $p_{K^3}(G(n,p)) = o(pn^2)$ quase certamente se $p \ll n^{-1/2}$. **{*Data de entrega*: 21/10/2020}**

(*ii*) Determine $p_{K^3}(G(n,p))$ assintoticamente para $p \gg ((\log n)/n)^{1/2}$. [*Observação.* Enuncie precisamente o resultado que você provará como resposta a esse item.]

27. Suponha agora que $p = (c/n)^{1/2}$, onde c é uma constante.

(*i*) Prove que existe uma constante c_0 tal que, se $0 < c < c_0$, então existe $\varepsilon = \varepsilon(c) > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(p_{K^3}(G(n,p)) \geq \varepsilon\,\frac{p}{3}\binom{n}{2}\right) = 1. \tag{16}$$

[*Sugestão.* Seja K_-^4 o grafo com 4 vértices e 5 arestas. O que você pode fazer se o número de K_-^4 é menor que o número de K^3?] **{*Data de entrega*: 21/10/2020}**

(*ii*) Decida se, para todo $\varepsilon > 0$, existem C_0 e n_0 tais que se $C \geq C_0$, então

$$\mathbb{P}\left(p_{K^3}(G(n,p)) \geq (1-\varepsilon)\frac{p}{3}\binom{n}{2}\right) \geq .99 \tag{17}$$

para todo $n \geq n_0$.

(*iii*) Decida se, para todo $\varepsilon > 0$, existe C_0 tal que se $C \geq C_0$, então

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(p_{K^3}(G(n,p)) \geq (1-\varepsilon)\frac{p}{3}\binom{n}{2}\right) = 1. \tag{18}$$

28. Dizemos que um hipergrafo é D-regular se todos os seus vértices têm grau D. Seja $H = H^N$ um hipergrafo k-uniforme D-regular. Prove que $\mathrm{cov}(H) \leq (1 + \log k)N/k$.

29. Considere o seguinte 3-grafo H_r ($r \geq 1$). Para $V(H_r)$, tomamos $U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_{2r}$, onde os U_i são conjuntos dois a dois disjuntos, $|U_0| = 3r$ e $|U_i| = 3$ para todo $1 \leq i \leq 2r$. As hiperarestas de H_r são as triplas e com $|e \cap U_0| = 1$ e $|e \cap U_i| = 2$ para algum $1 \leq i \leq 2r$.

(*i*) Verifique que H_r tem $N = 9r$ vértices e que H_r é $6r$-regular.

(*ii*) Prove que $\mathrm{cov}(H_r) = 4r$.

(*iii*) Note que $N/3 = 3r$ e assim H_r é tal que a cota $\mathrm{cov}(H) \geq N/k$ para hipergrafos k-uniformes $H = H^N$ está longe de ser justa para o hipergrafo 3-uniforme H_r. Explique por que este exemplo não contradiz o teorema de Frankl e Rödl/Pippenger e Füredi, que diz que essa cota é basicamente justa para certos hipergrafos H.

{*Data de entrega*: 21/10/2020}

30. Sejam $B_1, \dots, B_T$ eventos em um espaço de probabilidade. Seja p_k a probabilidade de exatamente k desses eventos ocorrer ($k \in \mathbb{N}$). Seja $\sigma_j = \sum_{|J|=j} \mathbb{P}(B_J)$, onde $B_J = \bigcap_{i\in J} B_i$ ($j \in \mathbb{N}$). Prove a seguinte generalização do princípio da inclusão e exclusão: para todo $k \geq 0$, temos

$$p_k = \sum_{j\geq k} (-1)^{j+k}\binom{j}{k}\sigma_j. \tag{19}$$

31. Sejam A, B e C conjuntos finitos. Prove que

$$\begin{aligned} &|A \setminus (B \cup C)| + |B \setminus (A \cup C)| + |C \setminus (A \cup B)| \\ &\qquad = |A| + |B| + |C| - 2\big(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\big) + 3|A \cap B \cap C|. \end{aligned} \tag{20}$$

{*Data de entrega*: 28/10/2020}

32. (Continuação do Exercício 30; Bonferroni generalizado) Prove que

$$p_k = \sum_{j\geq k} (-1)^{j+k}\binom{j}{k}\sigma_j \tag{21}$$

tem a propriedade das somas alternantes, no sentido que

$$p_k \leq \sum_{k \leq j \leq t} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} \sigma_j \tag{22}$$

se $t - k + 1$ é ímpar (isto é, o número de parcelas na soma do lado direito em (22) é ímpar) e

$$p_k \geq \sum_{k \leq j \leq t} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} \sigma_j \tag{23}$$

se $t - k + 1$ é par. **{*Data de entrega*: 28/10/2020}**

33. Complete a prova do Teorema 2 da Aula 13: prove que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X^{(n)} = k) = \mathrm{e}^{-\mu}\mu^k/k!$ para todo $k \geq 1$ (provamos na aula que esta afirmação vale para $k = 0$).
34. Complete a prova do Teorema 15.7, que afirma que todo grafo dirigido D d-regular com cintura dirigida pelo menos $8ed$ tem arboricidade linear dirigida $d+1$. [*Sugestão.* Lembre que já obtivemos uma decomposição das arestas de D em d 1-fatores F_i ($1 \leq i \leq d$) (subgrafos geradores 1-regulares). Temos assim uma decomposição de $E(D)$ em um certo número de circuitos dirigidos, que, pela hipótese sobre a cintura dirigida de D, têm comprimento pelo menos $8ed$. Lembre-se agora do Teorema 14.7, sobre transversais independentes.] **{*Data de entrega*: 4/11/2020}**
35. Seja $\delta > 0$ uma constante. Seja $p = p(n) = \sqrt{9(\log n)/\delta^2 n}$ e considere $G = G(n, p)$.
    (*i*) Prove que, assintoticamente quase-certamente (isto é, com probabilidade que tende a 1 quando $n \to \infty$), vale que todo par de vértices de G é ligado por $(1 \pm \delta)p^2 n$ caminhos de comprimento 2.
    (*ii*) Faça o Exercício 26(*ii*).
    {*Data de entrega*: 11/11/2020}
36. (Desigualdade de Jensen) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa.
    (*i*) Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tais que $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i = 1$. Prove que

    $$f\left(\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i f(x_i). \tag{24}$$

    (*ii*) Seja X uma variável aleatória e suponha que a função convexa f seja continuamente duas vezes diferenciável (isto é, suponha que f seja de classe C^2). Suponha que $\mathbb{E}(X) < \infty$. Prove que

    $$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)). \tag{25}$$

    [*Observação.* A desigualdade (25) de fato vale para qualquer função convexa f.]
37. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes, com $0 \leq X_i \leq 1$ para todo i. Sejam $X = \sum_{1\leq i\leq n} X_i$ e $\mu = \mathbb{E}(X)$.
    (*i*) Prove que, para todo $0 \leq t \leq n - \mu$, temos

    $$\mathbb{P}(X \geq \mu + t) \leq \left(\frac{\mu}{\mu + t}\right)^{\mu+t} \left(\frac{n-\mu}{n-\mu-t}\right)^{n-\mu-t}. \tag{26}$$

    (*ii*) Deduza que, para todo $t \geq 0$, temos

    $$\mathbb{P}(X \geq \mu + t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(\mu + t/3)}\right) \tag{27}$$

e
$$\mathbb{P}(X \le \mu - t) \le \exp\left(-\frac{t^2}{2\mu}\right). \tag{28}$$
[*Sugestão.* Note inicialmente que aqui as variáveis X_i não necessariamente assumem valores em $\{0,1\}$. Ademais, não estamos supondo que os X_i têm a mesma distribuição. Assim, as esperanças individuais $p_i = \mathbb{E}(X_i)$ não precisam coincidir (mas temos $p = n^{-1}\sum p_i$). Apesar disso, podemos obter as cotas acima usando a mesma técnica que usamos para tratar o caso em que $X \sim \mathrm{Bi}(n,p)$. Para tanto, use a desigualdade de Jensen para provar que $e^{ux} \le 1 - x + xe^u$ para estimar $\mathbb{E}(e^{uX_i})$. Seja $f(x) = f_a(x) = 1 + ax$. Use a desigualdade de Jensen ou a desigualdade da média aritmética e média geométrica para ver que $\prod_i f(p_i) \le f(p)^n$.] **{*Data de entrega*: 18/11/2020}**

38. Complete a prova do Teorema 18.6 (Desigualdade de McDiarmid). Para tanto, basta provar que o martingal $(X_i)_{0\le i\le n}$ que definimos em aula satisfaz $|X_i - X_{i-1}| \le c_i$ para todo $1 \le i \le n$. Você pode supor que os Λ_i são finitos. Diga explicitamente onde você está usando a independência das variáveis aleatórias Y_i. [*Sugestão.* Sem perda de generalidade, suponha que $\Omega = \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n$.] **{*Data de entrega*: 18/11/2020}**
39. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um *θ-conjunto* se, para quaisquer x, y e $z \in X$ distintos, o ângulo $\angle xyz$ com vértice y e lados yx e yz é menor que θ, isto é,
$$\cos^{-1}\frac{\langle x-y, z-y\rangle}{\|x-y\|\|z-y\|} < \theta \tag{29}$$
(aqui supomos $0 \le \cos^{-1} x \le \pi$). Prove que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $n \ge 1$ existe um $(\pi/3+\varepsilon)$-conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ com $|X| \ge (1+\delta)^n$. Note que, portanto, existe uma quantidade exponencial em n de pontos no $\mathbb{R}^n$ tal que quaisquer três deles determinam um triângulo "quase-equilátero".
40. Uma *subdivisão* de um grafo H é um grafo $\mathrm{T}H$ obtido substituindo-se arestas de H por caminhos de comprimento 1 ou mais, com todos esses caminhos internamente disjuntos nos vértices. (Subdivisões de H são também chamadas de cópias topológicas de H.) Seja
$$\sigma(G) = \max\{k\colon \exists\, \mathrm{T}K^k \subset G\}. \tag{30}$$
Assim, $\sigma(G)$ é o maior k para o qual G contém uma subdivisão de um grafo completo de ordem k. Uma conjectura de Hajós (1961) afirmava que $\chi(G) \le \sigma(G)$ para todo grafo G (esta conjectura é mais forte que uma bem-conhecida conjectura da Hadwiger). Prove que a conjectura de Hajós é falsa para quase todo grafo (isto é, prove que se sortearmos um grafo G com n vértices uniformemente ao acaso, então, com alta probabilidade, $\chi(G) > \sigma(G)$). **{*Data de entrega*: 25/11/2020}**
41. Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que quase-certamente $\sigma(G(n,1/2)) \ge c\sqrt{n}$. [*Sugestão.* Separe um conjunto de vértices S para serem os vértices de um K^k ($k \sim c\sqrt{n}$). Para obter $\mathrm{T}K^k \subset G(n,1/2)$, conecte todos os pares $\{x,y\} \in \binom{S}{2}$ por caminhos de comprimento 2. Para tanto, mostre que, para qualquer $\{x,y\}$, há um grande número de tais caminhos.] **{*Data de entrega*: 9/12/2020}**
42. Seja $V = \{0,1\}^n$ ($n \ge 1$). Defina o grafo Q^n sobre V, colocando em Q^n todas as arestas da forma $\{x, x'\}$, onde x e x' diferem em exatamente uma coordenada. O grafo Q^n assim obtido é o *n-hipercubo* ou *n-cubo*. O n-cubo tem $N = 2^n$ vértices e $nN/2 = n2^{n-1}$ arestas. Seja d a função distância em Q^n, isto é, para x e $y \in Q^n$, seja $d(x,y)$ a distância de x

a y em Q^n. Seja $\operatorname{diam} Q^n = \max\{d(x,y)\colon x,\, y \in V(Q^n)\}$ e seja $\operatorname{Ave}_{x,\,y\in V(Q^n)} d(x,y) = 2^{-2n}\sum_{x,y\in V(Q^n)} d(x,y)$. Seja $S \subset V(Q^n)$. Pomos $d(x,S) = \min\{d(x,s)\colon s \in S\}$ para todo $x \in V(Q^n)$. Para $S \subset V(Q^n)$ e $r \geq 0$, seja $B(S,r) = \{x \in V(Q^n)\colon d(x,S) \leq r\}$.

(*i*) Prove que $\operatorname{diam}(Q^n) = n$.

(*ii*) Prove que, se $S \neq \emptyset$, então $B(S,n) = V(Q^n)$.

(*iii*) Prove que $\operatorname{Ave}_{x,\,y\in V(Q^n)} d(x,y) = n/2$.

(*iv*) Prove que, tipicamente, $d(x,y) = (1/2+o(1))n$ (inicialmente, traduza essa afirmação para uma afirmação precisa, e então prove essa afirmação precisa).

43. Continuamos a considerar o n-cubo Q^n (veja o Exercício 42). Seja $S \subset V(Q^n)$ não-vazio.

(*i*) Seja $\alpha = |S|2^{-n}$ e $r = 2\sqrt{2n\log 1/\alpha}$. Prove que

$$|B(S,r)| \geq (1-\alpha)2^n. \tag{31}$$

[*Sugestão.* Seja $f(x) = d(x,S)$ $(x \in V(Q^n))$. Observe que $S = \{f = 0\}$. Considere $V(Q^n)$ como um espaço de probabilidade com a distribuição uniforme, e considere a variável aleatória $X = f$. Seja $\mu = \mathbb{E}(X)$. Prove inicialmente que $\mu \leq \sqrt{2n\log 1/\alpha}$. Prove então que $\mathbb{P}(X > r) \leq \alpha$.]

(*ii*) Seja $\omega = \omega(n)$ qualquer função com $\lim_{n\to\infty}\omega(n) = \infty$ e suponha que $|S| \geq 10^{-10}2^n$. Prove que quase todo $x \in V(Q^n)$ está a uma distância menor ou igual a $\omega\sqrt{n}$ de S, isto é, prove que

$$\lim_{n\to\infty} |B(S,\omega\sqrt{n})|2^{-n} = 1. \tag{32}$$

Informalmente: se temos uma fração positiva fixa de vértices de Q^n, então quase todo vértice de Q^n está a uma distância $\leq \omega\sqrt{n}$ desse conjunto de vértices. Dado que o diâmetro de Q^n e também as distâncias média e típica entre dois vértices de Q^n são lineares em n, isso pode parecer paradoxal. Você consegue "resolver" esse paradoxo?

{*Data de entrega*: 25/11/2020}

44. Sejam H e G grafos. Um *vértice-empacotamento* de H em G é uma família $\mathcal{F} = \{H_1,\dots,H_t\}$ de subgrafos de G com cada H_i isomorfo a H e tal que os H_i são dois-a-dois vértice-disjuntos ($V(H_i)\cap V(H_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$). Seja $q_H(G)$ a cardinalidade máxima de um vértice-empacotamentos de H em G. Naturalmente, $q_H(G) \leq |V(G)|/|V(H)|$.

(*i*) Prove que $q_{K^3}(G(n,p)) = o(n)$ quase certamente se $p \ll n^{-2/3}$.

(*ii*) Prove que, para todo $\varepsilon > 0$, existe C tal que se $p \geq Cn^{-2/3}$, então $q_{K^3}(G(n,p)) \geq (1/3-\varepsilon)n$ quase certamente.

(*iii*) Seja agora H um grafo arbitrário. Encontre uma constante $\alpha = \alpha(H)$ para a qual valem as seguintes afirmações.

(*a*) Se $p \ll n^{-1/\alpha}$, então $q_H(G(n,p)) = o(n)$ quase certamente.

(*b*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe C tal que se $p \geq Cn^{-1/\alpha}$, então, quase certamente, vale que $q_H(G(n,p)) \geq (1-\varepsilon)n/h$, onde $h = |V(H)|$.

{*Data de entrega*: 2/12/2020}

45. Seja $G = (V,E)$ um grafo e ℓ um inteiro positivo. Suponha que temos $L\colon V \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, uma função com $|L(v)| \geq \ell$ para todo v. Ademais, suponha o seguinte: *para todo v e todo $c \in L(v)$, vale que no máximo $\ell/2$e vértices w adjacentes a v são tais que $c \in L(w)$.* Prove

que existe $\chi\colon V \to \mathbb{N}$ com $\chi(v) \in L(v)$ para todo v tal que, para toda aresta $\{v, w\} \in E$, temos $\chi(v) \neq \chi(w)$ (isto é, χ é uma coloração própria de G que 'respeita' as listas $L(v)$ ($v \in V$); as cores em $L(v)$ são ditas *admissíveis* para v). [*Observação.* Resolva este exercício inicialmente para grafos finitos G. Resolva depois para grafos G com V infinito enumerável, por exemplo, supondo que $V = \mathbb{N}$. Se você conhece argumentos de compacidade, resolva este exercício para grafos G com V de cardinalidade arbitrária.]

46. Seja $G = (U, W; E)$ um grafo bipartido aleatório com $|U| = |W| = n$ e cada aresta ligando um vértice de U a um vértice de W presente com probabilidade p, independentemente. Prove que se C é uma constante grande o suficiente e $p = p(n) \geq C(\log n)/n$, então a.q.c. G tem um emparelhamento perfeito. [*Sugestão.* Verifique a condição de Hall.]

47. Seja $G = (U, W; E)$ um grafo bipartido com $|U| = n$ e $|W| = 2n$. Um $(2, 1)$-fator de G é um subgrafo $F = (U, W; E')$ de G em que todo vértice em U tem grau 2 e todo vértice em W tem grau 1.
   (*a*) Suponha que todo $S \subset U$ é tal que $|\Gamma(S)| \geq 2|S|$. Prove que G tem um $(2, 1)$-fator. [*Sugestão.* Use o teorema de Hall.]
   (*b*) Suponha agora que G é aleatório, com cada aresta ligando um vértice de U a um vértice de W presente com probabilidade p, independentemente. Prove que se C é uma constante grande o suficiente e $p = p(n) \geq C(\log n)/n$, então a.q.c. G tem um $(2, 1)$-fator.

48. Seja T_3 a árvore infinita 3-regular. Seja r um vértice de T_3. Para todo natural h, seja $T_3^{(h)}$ o *truncamento de altura* h de T_3 (em r): isto é, seja $T_3^{(h)}$ a subárvore de T_3 induzida pelos vértices em $B_h(r) = \{x \in V(T_3)\colon \operatorname{dist}(r, x) \leq h\}$. Assim, $T_3^{(h)}$ é uma árvore com $n_h = 1 + 3(2^h - 1)$ vértices, dos quais $3 \times 2^{h-1}$ são folhas e $n_h - 3 \times 2^{h-1}$ têm grau 3 no caso em que $h > 0$. Prove que existe uma constante C tal que se $p = p(n) \geq C(\log n)/n$, então a.q.c. $G(n_h, p)$ contém $T_3^{(h)}$ como subgrafo gerador. Mais formalmente, prove que
$$\lim_{h\to\infty} \mathbb{P}(G(n_h, p(n_h)) \supset T_3^{(h)}) = 1. \tag{33}$$
[*Sugestão.* Use E46, E47 e exposição múltipla.] **{*Data de entrega*: 16/12/2020}**

49. Seja G um grafo d-regular e $X_0, X_1, \ldots$ o passeio aleatório em G, com $X_0 \sim \pi^{(0)}$. Seja $\pi^{(t)}$ a distribuição de X_t. Sabemos que $\pi^{(t)} = (\hat{A})^t \pi^{(0)}$, onde $\hat{A} = d^{-1}A$ e A é a matriz de adjacência de G. A *taxa de mistura* do passeio aleatório em G é
$$\mu = \sup_{\pi^{(0)}} \limsup_{t\to\infty} \|\pi^{(t)} - \mathbf{u}\|_2^{1/t} = \sup_{\pi^{(0)}} \limsup_{t\to\infty} \|(\hat{A})^t \pi^{(0)} - \mathbf{u}\|_2^{1/t}, \tag{34}$$
onde $\mathbf{u}$ é a distribuição uniforme sobre $V = V(G)$ e o supremo é tomado sobre o conjunto das distribuições $\pi^{(0)}$ sobre V. Provamos que, se G é um (n, d, λ)-grafo, então $\mu \leq \lambda/d$. Prove que $\mu \geq \lambda/d$. **{*Data de entrega*: 23/12/2020}**