PROVA 1

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2º SEMESTRE DE 2022

Nome:

Número USP:

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **5** questões (contando a Questão 0 nesta página).
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar resultados estudados em sala.
(*5*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*6*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*7*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*8*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*9*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	4	**Total**
Nota						

Q0. **[5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2022/12/14, 7:46pm

Q1. [30 pontos] Nesta questão, trabalhamos sobre GF(2). Seja $S = \{\mathbf{e}_{ij} \colon 1 \leq i < j \leq 4\}$, onde

$$\mathbf{e}_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_{14} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_{24} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ \mathbf{e}_{34} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(i) É verdade que $\operatorname{Span} S = \mathrm{GF}(2)^4$? Justifique sua resposta.

Resposta:

(ii) Encontre $T \subset S$ tal que $\operatorname{Span} T = \operatorname{Span} S$ com $|T|$ menor possível. Justifique por que seu T é tal que $\operatorname{Span} T = \operatorname{Span} S$.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*iii*) Justifique por que seu T de (*ii*) acima tem cardinalidade menor possível.

Resposta:

Q2. **[20 pontos]** Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{5\times 5} \tag{2}$$

e considere a função linear associada $f_M\colon \mathbb{F}^5 \to \mathbb{F}^5$ dada por $f_M(\mathbf{v}) = M\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^5$.

(i) Suponha que $a_{33} = 0$ e que $a_{44} \neq 0$ e $a_{55} \neq 0$. Prove que f_M não é sobrejetora exibindo explicitamente um vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^5$ que não está na imagem de f_M. Diga por que seu $\mathbf{w}$ funciona.

Resposta:

(*ii*) Suponha agora que $a_{33} = 0$ e que $a_{11} \neq 0$ e $a_{22} \neq 0$. Prove que f_M não é injetora exibindo dois vetores distintos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ tais que $f_M(\mathbf{v}_1) = f_M(\mathbf{v}_2)$. Diga por que temos $f_M(\mathbf{v}_1) = f_M(\mathbf{v}_2)$ com sua escolha de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Resposta:

Q3. [20 pontos] Nesta questão, trabalhamos sobre GF(2). Considere os vetores

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

e $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(*i*) Prove que existe uma função linear $f\colon \mathrm{GF}(2)^3 \to \mathrm{GF}(2)^3$ tal que $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_{12}$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_{13}$ e $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_{23}$.

Resposta:

(*ii*) Existe uma função linear $g\colon \mathrm{GF}(2)^3 \to \mathrm{GF}(2)^3$ tal que $g(\mathbf{e}_{12}) = \mathbf{e}_1$, $g(\mathbf{e}_{13}) = \mathbf{e}_2$ e $g(\mathbf{e}_{23}) = \mathbf{e}_3$? Justifique sua resposta.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*iii*) Prove que existe uma função linear $h\colon \mathrm{GF}(2)^3 \to \mathrm{GF}(2)^3$ tal que $h(\mathbf{e}_{12}) = \mathbf{e}_1$, $h(\mathbf{e}_{13}) = \mathbf{e}_2$.

Resposta:

Q4. [30 pontos] Nesta questão, trabalhamos sobre $\mathbb{C}$. Abaixo, $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Considere os vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \\ -1 \\ -\mathbf{i} \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ \text{e} \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \\ -1 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

(i) Considere as matrizes $A = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{v}_4]$ e $B = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_4 \mid \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{v}_2]$. Calcule AB e BA.

Resposta:

(ii) Prove que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ são linearmente independentes.

Resposta:

(iii) Prove que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ geram $\mathbb{C}^4$.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*iv*) Os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ formam uma base de $\mathbb{C}^4$? Justifique sua resposta.

Resposta:

Rascunho:

Rascunho: