PROVA 2

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2^{O} SEMESTRE DE 2022

Nome:
Número USP:

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **4** questões (contando a Questão 0 nesta página).
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar resultados estudados em sala.
(*5*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*6*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*7*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*8*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*9*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	**Total**
Nota					

Q0. **[5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2022/12/12, 11:34am

Rascunho:

Q1. [35 pontos] Nesta questão, trabalhamos sobre GF(2).

(i) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GF}(2)^{5\times 5}. \tag{1}$$

Encontre uma matriz M tal que MA está na forma escalonada.

Resposta:

(ii) Fixe $(b_1, \ldots, b_5) \in \mathrm{GF}(2)^5$ e considere 'bitstrings' $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathrm{GF}(2)^5$. Tais bitstrings $\mathbf{x}$ são chamados *do tipo* $(b_1, \ldots, b_5)$ se $x_i + x_{i+1} = b_i$ para $1 \le i < 5$ e, ademais, $x_5 + x_1 = b_5$. Quantos bitstrings do tipo $(b_1, \ldots, b_5)$ existem? Justifique sua resposta.

Resposta:

Q2. [40 pontos] Nesta questão, trabalhamos sobre GF(2). Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{GF}(2)^{5\times 6}. \tag{2}$$

(i) Encontre uma matriz M tal que MA está na forma escalonada. (Depois de obter M, não deixe de calcular o produto MA para ter certeza de sua resposta.)

Resposta:

(*ii*) Quanto é o posto de A. Justifique sua resposta.

Resposta:

(*iii*) Dê uma base para o espaço vetorial gerado pelas linhas de A. Justifique sua resposta.

Resposta:

(*iv*) Seja r o posto de A. Encontre r linhas de A que são linearmente independentes. Justifique sua resposta.

Resposta:

Q3. [**40 pontos**] Nesta questão, trabalhamos sobre $\mathbb{R}$. Considere os vetores

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Note que $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$ e $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$. Seja $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

(i) Considere a matriz $M = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2] \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ cujas colunas são $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ e considere a decomposição $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\|} + \mathbf{b}^{\perp}$, onde $\mathbf{b}^{\|} \in V$ e $\langle \mathbf{b}^{\perp}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Prove que $\mathbf{b}^{\|} = MM^{\top}\mathbf{b}$.

Resposta:

(ii) Para cada um dos vetores $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ abaixo, encontre $\mathbf{b}^{\parallel}$ e $\mathbf{b}^{\perp}$ como em (i):

- (a) $\mathbf{b} = [1 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 1]^\top$
- (b) $\mathbf{b} = [1 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 2]^\top$
- (c) $\mathbf{b} = [1 \ \ -1 \ \ -1 \ \ 1]^\top$

Resposta:

(iii) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}. \tag{4}$$

Encontre uma fatoração QR para A, isto é, encontre uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ com colunas ortonormais e uma matriz R triangular superior inversível tal que $A = QR$.

Resposta:

(iv) Seja $\mathbf{b} = [1 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 1]^\top$. Encontre $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \min\{\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}. \qquad (5)$$

Resposta:

Rascunho:

Rascunho: