PROVA DE RECUPERAÇÃO

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2^{O} SEMESTRE DE 2022

Nome:	
Número USP:	

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **5** questões (contando a Questão 0 nesta página).
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) **Justifique suas afirmações:** Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar resultados estudados em sala.
(*5*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*6*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*7*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*8*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*9*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	4	**Total**
Nota						

Q0. **[5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2023/2/10, 4:40am

Rascunho:

Q1. [20 pontos] Considere os algoritmos A1 e A2 dados abaixo.

Algorithm 1: A1

Entrada: Espaço vetorial $V \subset \mathbb{F}^D$ com D finito

$S \leftarrow \emptyset$
while $\operatorname{Span} S \neq V$ **do**
  $\mathbf{v} \leftarrow$ algum vetor em $V \setminus \operatorname{Span} S$
  $S \leftarrow S \cup \{\mathbf{v}\}$
end
return S

Algorithm 2: A2

Entrada: Espaço vetorial $V \subset \mathbb{F}^D$ com D finito

$S \leftarrow$ algum S finito tal que $\operatorname{Span} S = V$
while *existe* $\mathbf{v}$ *tal que* $\operatorname{Span}(S \setminus \{\mathbf{v}\}) = V$ **do**
  $S \leftarrow S \setminus \{\mathbf{v}\}$
end
return S

(i) Suponha que A1 termina e devolve um conjunto S.
  (a) Prove que os vetores em S são linearmente independentes.
  (b) Prove que os vetores em S geram V, isto é, $\operatorname{Span} S = V$.
(ii) Suponha que A2 termina e devolve um conjunto S.
  (a) Prove que os vetores em S são linearmente independentes.
  (b) Prove que os vetores em S geram V, isto é, $\operatorname{Span} S = V$.

Resposta:

Resposta (continuação):

Q2. **[20 pontos]** Sejam dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^n$ linearmente independentes.

(i) Considere a matriz $M \in \mathbb{F}^{n\times n}$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$ $(1 \le i \le n)$:

$$M = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]. \tag{1}$$

Seja $f_M \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ a função dada por $f_M(\mathbf{a}) = M\mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n$. Prove que $f_M^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{0}\}$. Deduza que f_M é injetora.

(ii) Suponha que $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$ seja tal que

$$\mathbf{w} = \sum_{1\le i\le n} \alpha_i \mathbf{v}_i \tag{2}$$

e

$$\mathbf{w} = \sum_{1\le i\le n} \beta_i \mathbf{v}_i \tag{3}$$

para certos escalares α_i e β_i $(1 \le i \le n)$. Prove que $\alpha_i = \beta_i$ para todo $1 \le i \le n$.

Resposta:

Resposta (continuação):

Q3. [30 pontos] Seja $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathbf{i}/5}$, onde $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Considere a matriz $F = (f_{ij}) \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ onde $f_{ij} = \omega^{ij}$ para todo $0 \leq i < 5$ e $0 \leq j < 5$. Considere também a matriz $G = (g_{ij}) \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ onde $g_{ij} = \omega^{-ij}$ para todo $0 \leq i < 5$ e $0 \leq j < 5$. (As linhas e colunas dessas matrizes estão indexadas de 0 a 4.)

(i) Calcule FG e GF.

(ii) Prove que as colunas de F são linearmente independentes.

(iii) Prove que as colunas de F geram $\mathbb{C}^5$.

Resposta:

Resposta (continuação):

Q4. [**30 pontos**] Considere os vetores

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

(*i*) Prove que os $\mathbf{b}_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

(*ii*) Seja

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Encontre $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 4)$ tais que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_4 \mathbf{b}_4. \tag{6}$$

(*iii*) Seja $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Encontre a projeção ortogonal *sobre* W de $\mathbf{v}$ e a projeção ortogonal *a* W de $\mathbf{v}$. Isto é, encontre $\mathbf{v}^{\parallel W}$ e $\mathbf{v}^{\perp W}$ de forma que $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\parallel W} + \mathbf{v}^{\perp W}$, $\mathbf{v}^{\parallel W} \in W$ e $\langle \mathbf{v}^{\perp W}, \mathbf{w} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{w} \in W$.

Resposta:

Resposta (continuação):

Rascunho:

Rascunho: