PROVA SUBSTITUTIVA

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2º SEMESTRE DE 2022

Nome:

Número USP:

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **5** questões (contando a Questão 0 nesta página).
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar resultados estudados em sala.
(*5*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*6*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*7*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*8*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*9*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	4	**Total**
Nota						

Q0. **[5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2022/12/14, 10:16pm

Rascunho:

Q1. [20 pontos] Considere os vetores

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(i) Suponha que estamos trabalhando em $\mathbb{R}^3$, o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Prove que $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ gera $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

(ii) Suponha agora que estamos trabalhando em $\mathrm{GF}(2)^3$, o espaço vetorial sobre $\mathrm{GF}(2)$. Prove que $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ não gera $\mathrm{GF}(2)^3$.

Resposta:

Q2. **[20 pontos]** Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Suponha que A e B sejam subconjuntos finitos de V com $|A| < |B|$. Ademais, suponha que tanto A como B sejam conjuntos linearmente independentes. Prove que existe $\mathbf{b} \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{\mathbf{b}\}$ é linearmente independente.

Resposta:

Q3. **[30 pontos]** Nesta questão, trabalhamos sobre GF(2). Considere a matriz $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GF}(2)^{n \times n}$ com

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2}$$

(i) Prove que A_n é inversível no caso em que n é par. [*Sugestão.* Calcule A_n^2.]
Resposta:

(ii) Prove que A_n não é inversível no caso em que n é ímpar.
Resposta:

(iii) Prove que A_n tem posto $n-1$ no caso em que n é ímpar.

Resposta:

Q4. [30 pontos] Seja

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

e sejam $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_4 \in \mathbb{R}^4$ as colunas de H. Assim $H = [\mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_4]$. Seja $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ e $\mathbf{e}_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^\top \in \mathbb{R}^4$. Encontre a projeção ortogonal *sobre* V de $\mathbf{e}_1$ e a projeção ortogonal *a* V de $\mathbf{e}_1$. Isto é, encontre $\mathbf{e}_1^{\|V}$ e $\mathbf{e}_1^{\perp V}$ de forma que $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{\|V} + \mathbf{e}_1^{\perp V}$, $\mathbf{e}_1^{\|V} \in V$ e $\langle \mathbf{e}_1^{\perp V}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

Resposta:

Resposta (continuação):

Rascunho:

Rascunho:

Rascunho: