PROVA 1

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2^{O} SEMESTRE DE 2024

Nome:

Número USP:

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **5** questões (contando a Questão 0 nesta página). Note que é possível tirar mais de 10 nesta prova `:-)`
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar conceitos e resultados estudados nesta disciplina até agora. (Por exemplo, não conhecemos e muito menos desenvolvemos o conceito de determinantes.)
(*5*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*6*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*7*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*8*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*9*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	4	**Total**
Nota						

Q0. **[0.5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2024/10/7, 3:41pm

Q1. [3 pontos]

(i) Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores em um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. O que é uma combinação linear desses vetores $\mathbf{v}_i$?

Resposta:

(ii) Sejam $\mathbf{v}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ como no item anterior. O que é o conjunto $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ gerado por esses $\mathbf{v}_i$?

Resposta:

(iii) Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Sejam $\mathbf{v}_i$ $(1 \leq i \leq 5)$ as colunas de M, considerados como vetores em $\mathbb{R}^5$. Prove que $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\} = \mathbb{R}^5$. [*Sugestão.* Considere o vetor $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$ e calcule $M\mathbf{x}_1$ (neste produto, interpretamos $\mathbf{x}_1$ como um vetor coluna).]

Resposta:

Resposta (continuação):

(*iv*) Considere os $\mathbf{v}_i$ $(1 \leq i \leq 5)$ do item anterior, agora como vetores em $\mathrm{GF}(2)^5$. Prove que $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\} \neq \mathrm{GF}(2)^5$.

Resposta:

Q2. **[3 pontos]** Considere a matriz

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{5\times 5}, \tag{2}$$

onde $a \in \mathbb{F}$. Considere a função linear $f_a \colon \mathbb{F}^5 \to \mathbb{F}^5$ dada por $f_a(\mathbf{v}) = M_a\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^5$.

(*i*) Suponha que $a \neq 0$. Prove que f_a é bijetora. [*Sugestão.* Seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$. Note que $f_a(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ corresponde a um sistema triangular de equações lineares.]

Resposta:

(*ii*) Suponha agora que $a = 0$. Prove que f_a não é injetora, exibindo dois vetores distintos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ em $\mathbb{F}^5$ tais que $f_a(\mathbf{v}) = f_a(\mathbf{v}')$.

Resposta:

(*iii*) Suponha novamente que $a = 0$. Prove que f_a não é sobrejetora, exibindo um vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^5$ tal que $\mathbf{b}$ não está na imagem de f_a. [*Sugestão.* Considere o vetor $\mathbf{y} = (0, 1, -1, -1, 1)$ e calcule $\mathbf{y}M$, onde neste produto consideramos $\mathbf{y}$ como um vetor linha.]

Resposta:

Q3. **[3 pontos]** Prove ou dê contraexemplos, justificando quaisquer afirmações que não sejam evidentes:

(*i*) Sejam $g\colon X \to Y$ e $f\colon Y \to Z$ funções tais que $f \circ g$ é inversível. Então tanto f quanto g são inversíveis.

Resposta:

(*ii*) Sejam $A \in \mathbb{F}^{R\times C}$ e $B \in \mathbb{F}^{C\times R}$ matrizes. Sejam I_R a matriz identidade em $\mathbb{F}^{R\times R}$ e I_C a matriz identidade em $\mathbb{F}^{C\times C}$. Se $AB = I_R$, então A é inversível.

Resposta:

Resposta (continuação):

(iii) Sejam A, B, I_R e I_C como em (ii) acima. Se $AB = I_R$, então B é inversível.

Resposta:

Q4. [2.5 pontos] Seja G_0 o grafo da Figura 1.

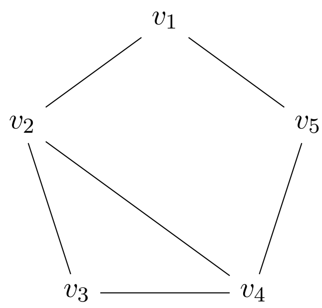

FIGURA 1. Grafo G_0

(i) Lembre que o *grau* $d_G(v)$ de um vértice v em um grafo G é o número de arestas de G que contêm v. Determine os graus de todos os vértices do grafo G_0.

Resposta:

(ii) Para cada par (i, j) com $i < j$ tal que há uma aresta $\{v_i, v_j\}$ em G_0, seja e_{ij} essa aresta: $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$. Sejam E_0 o conjunto das arestas de G_0 e V_0 o conjunto de vértices de G_0. Seja $M_0 \in \mathbb{R}^{V \times E}$ a matriz de incidência de G_0: a matriz cuja coluna correspondente a e_{ij} é a função característica $\mathbb{1}_{\{v_i,v_j\}} \in \{0, 1\}^{V_0}$ da aresta e_{ij}. Escreva aqui a matriz M_0 explicitamente.

Resposta:

(*iii*) Seja $G = (V, E)$ um grafo. Lembre que a matriz de adjacência de G é a matriz $V \times V$ com entradas a_{xy} dadas por

$$a_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{x, y\} \in E, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3}$$

Escreva aqui a matriz de adjacência A_0 de G_0 explicitamente.

Resposta:

(*iv*) Calcule o produto $M_0 M_0^T$ (veja (*ii*) acima).

Resposta:

(*v*) Seja $G = (V, E)$ um grafo. Sejam $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ sua matriz de incidência e $A \in \mathbb{R}^{V \times V}$ sua matriz de adjacência. Expresse $MM^\top$ em função de A e D, onde D é a matriz diagonal $V \times V$ cuja entrada (v, v) é $d_G(v)$. [*Observação.* Não é necessário justificar sua resposta.]

Resposta:

Rascunho:

Rascunho: