PROVA 2

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2º SEMESTRE DE 2024

Nome completo: ______________________________

NUSP: ______________________________

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **4** questões (contando a Questão 0 nesta página). Note que é possível tirar mais de 10 nesta prova `:-)`
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) Cálculos relevantes devem constar em suas respostas, possivelmente no rascunho.
(*5*) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar conceitos e resultados estudados nesta disciplina ao longo do semestre. (Por exemplo, não conhecemos e muito menos desenvolvemos o conceito de determinantes.)
(*6*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*7*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*8*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*9*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*10*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	**Total**
Nota					

Q0. **[0.5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2024/12/2, 2:05pm

Q1. [4 pontos]

(i) O que é o posto de uma matriz $M \in \mathbb{F}^{m\times n}$?

Resposta:

(ii) Sejam $M \in \mathbb{F}^{r\times s}$ e $N \in \mathbb{F}^{s\times t}$ duas matrizes. É necessariamente verdade que $\operatorname{posto}(MN) \leq \operatorname{posto} M$? Prove ou dê contraexemplo. [*Observação.* Se A é uma matriz, denotamos seu posto por $\operatorname{posto} A$.]

Resposta:

Resposta (continuação):

(*iii*) Suponha que $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ e $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$ sejam matrizes tais que $AB = I_m$ e $BC = I_n$, onde I_m e I_n são as matrizes identidade $m\times m$ e $n\times n$. É necessariamente verdade que $m = n$? Prove ou dê contraexemplo.

Resposta:

Q2. [3.5 pontos] Seja

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \tag{1}$$

e sejam $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_4 \in \mathbb{R}^4$ as colunas de H. Assim, $H = [\mathbf{q}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{q}_4]$.

(i) Calcule $H^\top H$. Quanto vale o produto interno $\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle$ para $1 \leq i,\, j \leq 4$?

Resposta:

(ii) Prove que $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_4$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

Resposta:

(*iii*) Seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$. Há reais $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ tais que

$$\mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{q}_1 + \cdots + \alpha_4 \mathbf{q}_4. \tag{2}$$

Dê uma fórmula para os α_i ($1 \leq i \leq 4$). [*Sugestão.* Considere a expressão (2) e calcule o produto interno com $\mathbf{q}_i$.]

Resposta:

(*iv*) Seja $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$. Para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$, sabemos que existem $\mathbf{b}^{\parallel V}$ e $\mathbf{b}^{\perp V}$ univocamente definidos tais que $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\parallel V} + \mathbf{b}^{\perp V}$, $\mathbf{b}^{\parallel V} \in V$ e $\langle \mathbf{b}^{\perp V}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Dê uma fórmula para $\mathbf{b}^{\parallel V}$ e $\mathbf{b}^{\perp V}$ em termos dos α_i e $\mathbf{q}_i$ ($1 \leq i \leq 4$) em (2). Justifique sua resposta.

Resposta:

Resposta (continuação):

Q3. [4 pontos]

(i) O significa dizer que $\lambda \in \mathbb{F}$ é um autovalor de uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$?

Resposta:

(ii) O que significa dizer que $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ é um autovetor de uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$?

Resposta:

Considere daqui para frente a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}. \tag{3}$$

Sejam $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^4$ $(1 \leq i \leq 4)$ as colunas de S, de forma que $S = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_4]$.

(*iii*) Sejam λ_i $(1 \leq i \leq 4)$ números reais quaisquer. Prove que existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que, para cada i, vale que λ_i é um autovalor de A com autovetor associado $\mathbf{v}_i$. Justifique sua resposta. [*Sugestão.* Considere

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Determine TS e ST.]

Resposta:

(*iv*) Sejam $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Seja $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ uma matriz. Suponha que $\mathbf{w}_i$ seja um autovetor de B com autovalor λ_i para todo i com $1 \leq i \leq 3$. Suponha que λ_1, λ_2 e λ_3 não são todos iguais. Prove que $\mathbf{w}_4$ não pode ser um autovetor de B.

Resposta:

— * * * —

Rascunho:

Rascunho: