PROVA SUBSTITUTIVA

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2^{O} SEMESTRE DE 2024

Nome completo: ____

NUSP: ____

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **4** questões (contando a Questão 0 nesta página). Note que é possível tirar mais de 10 nesta prova `:-)`
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) Cálculos relevantes devem constar em suas respostas, possivelmente no rascunho.
(*5*) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar conceitos e resultados estudados nesta disciplina ao longo do semestre. (Por exemplo, não conhecemos e muito menos desenvolvemos o conceito de determinantes.)
(*6*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*7*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*8*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*9*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*10*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	**Total**
Nota					

Q0. **[0.5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2024/12/10, 12:59 Noon

Q1. [3 pontos]

(i) O que é uma base de um espaço vetorial V?

Resposta:

(ii) O que é a dimensão de um espaço vetorial V?

Resposta:

(iii) Seja $A \subset V$ um conjunto linearmente independente de vetores de um espaço vetorial V. Suponha, ademais, que A seja *maximal* com essa propriedade, isto é, se $A \subset A' \subset V$ e $A \neq A'$, então A' não é linearmente independente. Prove que A é uma base de V.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*iv*) Seja $B \subset V$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial V que gera V. Suponha, ademais, que B seja *minimal* com essa propriedade, isto é, se $B' \subset B$ e $B' \neq B$, então B' não gera V. Prove que B é uma base de V.

Resposta:

Resposta (continuação):

Q2. **[4.5 pontos]** Nesta questão, trabalhamos sobre GF(2). Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{GF}(2)^{4\times 6}. \tag{1}$$

(i) Use eliminação gaussiana para determinar o posto de A.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*ii*) Encontre um vetor coluna $\mathbf{y} \in \mathrm{GF}(2)^4$ não-nulo tal que $\mathbf{y}^\top A = 0$. Como você encontrou $\mathbf{y}$?

Resposta:

Resposta (continuação):

Nos itens a seguir, para todo $\mathbf{b} \in \mathrm{GF}(2)^4$, seja $S_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{GF}(2)^6 \colon A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$. Ademais, seja $\mathbf{y} \in \mathrm{GF}(2)^4$ como em (*ii*) acima.

(*iii*) Prove que se $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} \neq 0$, então $S_{\mathbf{b}} = \emptyset$.

Resposta:

(*iv*) Sejam X e Y subespaços de um espaço vetorial V. Suponha que $X \subset Y$. Prove que $X^\circ \supset Y^\circ$.

Resposta:

Resposta (continuação):

(v) Prove que se $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = 0$, então $S_\mathbf{b} \neq \emptyset$. [*Sugestão.* Note que (a) $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = 0$ se e só se $\mathbf{b} \in (\operatorname{Span}\{\mathbf{y}\})^\circ$ e (b) $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{0}$ se e só se $\operatorname{Span}\{\mathbf{y}\} \subset (\operatorname{Col} A)^\circ$. Argumente que $\mathbf{b} \in \operatorname{Col} A$ e que isso é suficiente.]

Resposta:

Resposta (continuação):

(vi) Suponha que $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = 0$. Determine a cardinalidade do conjunto $S_{\mathbf{b}}$, justificando sua resposta.

Resposta:

Q3. [**4 pontos**] Suponha que $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ seja uma matriz triangular superior, isto é, tal que $a_{ij} = 0$ para todo par (i, j) com $i > j$. Ademais, suponha que as entradas diagonais a_{ii} $(1 \leq i \leq n)$ sejam todas distintas.

(i) Prove que a_{ii} é um autovalor de A para todo $1 \leq i \leq n$.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*ii*) Para cada $1 \leq i \leq n$, seja $\mathbf{v}_i \in \mathbb{F}^n$ um autovetor de A com autovalor a_{ii}. Prove que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*iii*) Descreva uma matriz inversível $S \in \mathbb{F}^{n\times n}$ em termos dos $\mathbf{v}_i$ acima tal que $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, onde $\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ é a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

em que as entradas da diagonal são $a_{11}, a_{22}, \ldots$ como vemos acima e todas as outras entradas são nulas. Justifique sua resposta (não esqueça de dizer por que sua S é inversível).

Resposta:

Rascunho:

Rascunho: