

PROVA SUBSTITUTIVA
MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)
2^o SEMESTRE DE 2024

Nome completo: _____

NUSP: _____

Instruções:

- (1) Esta prova é individual.
- (2) A prova consiste de 4 questões (contando a Questão 0 nesta página). Note que é possível tirar mais de 10 nesta prova :-)
- (3) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
- (4) Cálculos relevantes devem constar em suas respostas, possivelmente no rascunho.
- (5) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar conceitos e resultados estudados nesta disciplina ao longo do semestre. (Por exemplo, não conhecemos e muito menos desenvolvemos o conceito de determinantes.)
- (6) As respostas devem estar nos locais indicados.
- (7) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
- (8) Não destaque as folhas deste caderno.
- (9) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
- (10) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	Total
Nota					

Q0. [0.5 pontos] Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Q1. [3 pontos]

(i) O que é uma base de um espaço vetorial V ?

Resposta:

(ii) O que é a dimensão de um espaço vetorial V ?

Resposta:

(iii) Seja $A \subset V$ um conjunto linearmente independente de vetores de um espaço vetorial V . Suponha, ademais, que A seja *maximal* com essa propriedade, isto é, se $A \subset A' \subset V$ e $A \neq A'$, então A' não é linearmente independente. Prove que A é uma base de V .

Resposta:

Resposta (continuação):

- (iv) Seja $B \subset V$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial V que gera V . Suponha, ademais, que B seja *minimal* com essa propriedade, isto é, se $B' \subset B$ e $B' \neq B$, então B' não gera V . Prove que B é uma base de V .

Resposta:

Resposta (continuação):

Q2. [4.5 pontos] Nesta questão, trabalhamos sobre $\text{GF}(2)$. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{GF}(2)^{4 \times 6}. \quad (1)$$

(i) Use eliminação gaussiana para determinar o posto de A .

Resposta:

Resposta (continuação):

- (ii) Encontre um vetor coluna $\mathbf{y} \in \text{GF}(2)^4$ não-nulo tal que $\mathbf{y}^\top A = 0$. Como você encontrou \mathbf{y} ?

Resposta:

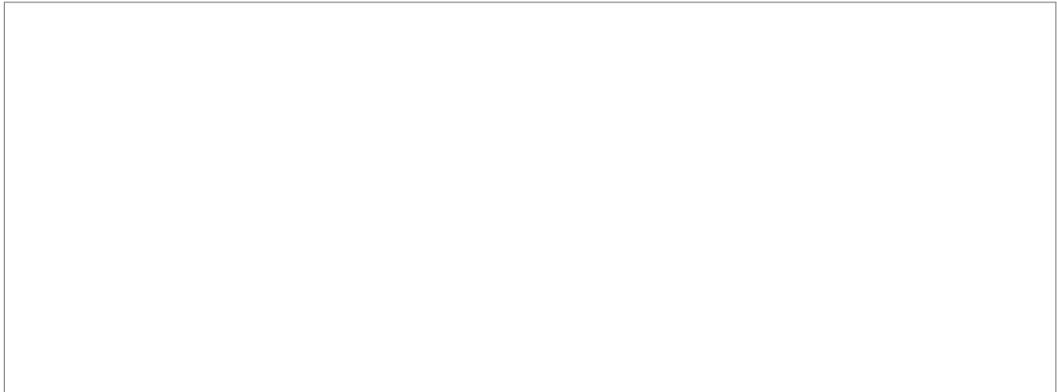
Resposta (continuação):



Nos itens a seguir, para todo $\mathbf{b} \in \text{GF}(2)^4$, seja $S_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \text{GF}(2)^6 : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$. Ademais, seja $\mathbf{y} \in \text{GF}(2)^4$ como em (ii) acima.

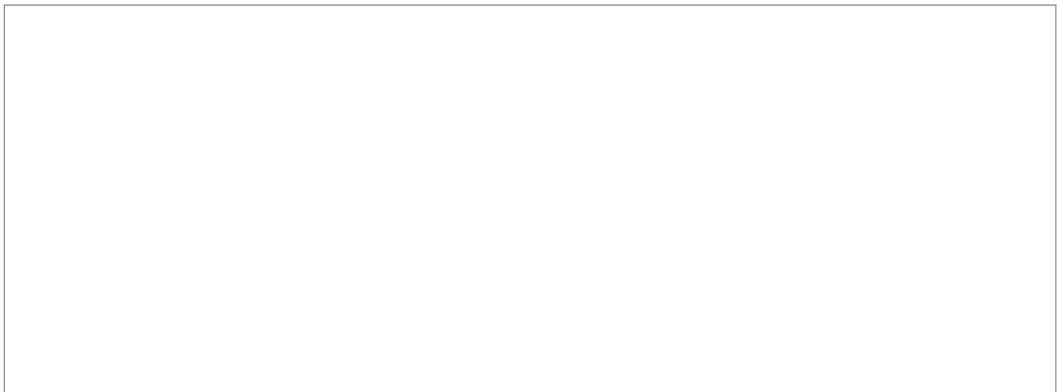
(iii) Prove que se $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} \neq 0$, então $S_{\mathbf{b}} = \emptyset$.

Resposta:



(iv) Sejam X e Y subespaços de um espaço vetorial V . Suponha que $X \subset Y$. Prove que $X^\circ \supset Y^\circ$.

Resposta:



Resposta (continuação):

- (v) Prove que se $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = 0$, então $S_{\mathbf{b}} \neq \emptyset$. [*Sugestão.* Note que (a) $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = 0$ se e só se $\mathbf{b} \in (\text{Span}\{\mathbf{y}\})^\circ$ e (b) $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{0}$ se e só se $\text{Span}\{\mathbf{y}\} \subset (\text{Col } A)^\circ$. Argumente que $\mathbf{b} \in \text{Col } A$ e que isso é suficiente.]

Resposta:

Resposta (continuação):

(vi) Suponha que $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = 0$. Determine a cardinalidade do conjunto $S_{\mathbf{b}}$, justificando sua resposta.

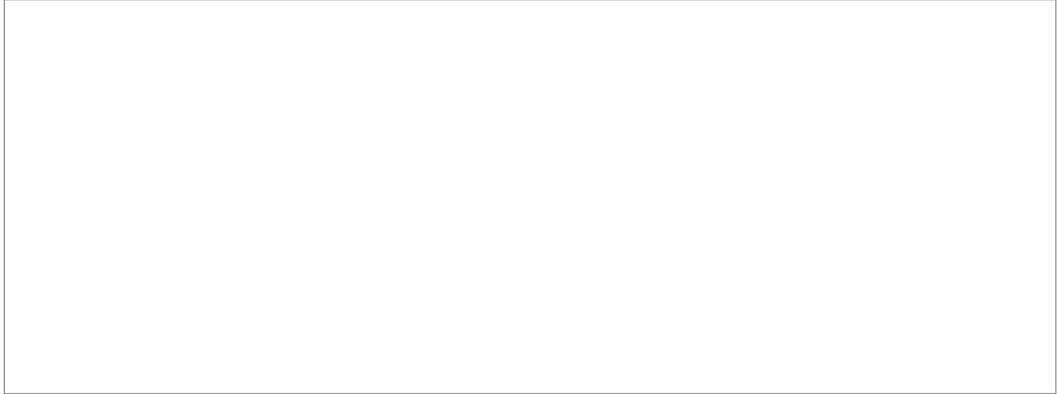
Resposta:

Q3. [4 pontos] Suponha que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ seja uma matriz triangular superior, isto é, tal que $a_{ij} = 0$ para todo par (i, j) com $i > j$. Ademais, suponha que as entradas diagonais a_{ii} ($1 \leq i \leq n$) sejam todas distintas.

(i) Prove que a_{ii} é um autovalor de A para todo $1 \leq i \leq n$.

Resposta:

Resposta (continuação):



- (ii) Para cada $1 \leq i \leq n$, seja $\mathbf{v}_i \in \mathbb{F}^n$ um autovetor de A com autovalor a_{ii} . Prove que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes.

Resposta:



Resposta (continuação):

(iii) Descreva uma matriz inversível $S \in \mathbb{F}^{n \times n}$ em termos dos \mathbf{v}_i acima tal que $S^{-1}AS = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, onde $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ é a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

em que as entradas da diagonal são a_{11}, a_{22}, \dots como vemos acima e todas as outras entradas são nulas. Justifique sua resposta (não esqueça de dizer por que sua S é inversível).

Resposta:

Rascunho:



Rascunho:

