

ÁLGEBRA LINEAR I

2^o SEMESTRE DE 2024

EXERCÍCIOS DE REVISÃO PARA A P1

Estes são uns exercícios de revisão para a primeira prova. Estes exercícios são um pouco inspirados nos *review questions* de **PNK** (Capítulos 3 a 5).

Q1 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e seja $S \subset V$. O que é uma combinação linear de vetores de S ?

Q2 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e seja $S \subset V$. O que é uma combinação linear afim de vetores de S ?

Q3 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} ou sobre \mathbb{C} e seja $S \subset V$. O que é uma combinação linear convexa de vetores de S ?

Q4 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e seja $S \subset V$. O que é o espaço $\text{Span } S$ gerado por S ?

Q5 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} . Sejam dados X um subconjunto de V e \mathbf{v} e \mathbf{w} elementos de V .

(i) Prove que se $\mathbf{v} \in \text{Span}(X \cup \{\mathbf{w}\}) \setminus \text{Span } X$, então $\mathbf{w} \in \text{Span}(X \cup \{\mathbf{v}\}) \setminus \text{Span } X$.

(ii) É verdade que se $\mathbf{v} \in \text{Span}(X \cup \{\mathbf{w}\})$, então $\mathbf{w} \in \text{Span}(X \cup \{\mathbf{v}\})$?

Q6 (i) Sejam dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^D$ e seja $S = \{\mathbf{v}_i : 1 \leq i \leq n\}$. Seja $[n] = \{1, \dots, n\}$ e considere a matriz $M \in \mathbb{F}^{D \times [n]}$ cujas colunas são os vetores \mathbf{v}_i ($1 \leq i \leq n$):

$$M = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]. \quad (1)$$

Prove que

$$\text{Span } S = \{M\mathbf{w} : \mathbf{w} \in \mathbb{F}^{[n]}\}. \quad (2)$$

(ii) Seja $V \subset \mathbb{F}^D$ um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e seja $X \subset V$. Seja $Y = \text{Span } X$. Prove que $\text{Span } Y = Y$.

Q7 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e seja $S \subset V$. O espaço $\text{Span } S$ gerado por S é um espaço vetorial? Justifique.

Q8 Sejam dados $\mathbf{a}_i \in \mathbb{F}^D$ ($1 \leq i \leq n$) e considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = 0 \\ \dots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Seja $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^D : \mathbf{x} \text{ satisfaz (3)}\}$ o conjunto das soluções de (3). Prove que S é um espaço vetorial sobre \mathbb{F} .

Q9 Seja $M \in \mathbb{F}^{R \times C}$ uma matriz. O que é o espaço nulo $\text{Null } M$ de M ?

Q10 Seja $M \in \mathbb{F}^{R \times C}$ uma matriz. O espaço nulo $\text{Null } M$ de M é um espaço vetorial? Justifique.

Q11 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e seja $S \subset V$. O que é o espaço afim $\text{Aff } S$ gerado por S ?

Q12 Sejam dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^D$ e seja $S = \{\mathbf{v}_i : 1 \leq i \leq n\}$. Seja $[n] = \{1, \dots, n\}$ e considere a matriz $M \in \mathbb{F}^{D \times [n]}$ cujas colunas são os vetores \mathbf{v}_i ($1 \leq i \leq n$):

$$M = [\mathbf{v}_1 \mid \dots \mid \mathbf{v}_n]. \quad (4)$$

Seja $\mathbf{j} \in \mathbb{F}^{[n]}$ o vetor cujas entradas são todas 1. Prove que

$$\text{Aff } S = \{M\mathbf{w} : \mathbf{w} \in \mathbb{F}^{[n]} \text{ tal que } \mathbf{j} \cdot \mathbf{w} = 1\}. \quad (5)$$

Q13 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e seja $S \subset V$. Dizemos que $X \subset V$ é *fechado por combinações afins* se a combinação afim de quaisquer elementos de X está em X .

(i) Prove que $\text{Aff } S$ é fechado por combinações afins.

(ii) Seja $X = \text{Aff } S$. Prove que $\text{Aff } X = X$.

Q14 Considere os vetores

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

(i) Suponha que estamos trabalhando em \mathbb{R}^3 , o espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Prove que $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ gera \mathbb{R}^3 .

(ii) Suponha agora que estamos trabalhando em $\text{GF}(2)^3$, o espaço vetorial sobre $\text{GF}(2)$. Prove que $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ não gera $\text{GF}(2)^3$.

Q15 Seja $f: V \rightarrow W$ uma função, onde $V \subset \mathbb{F}^n$ e $W \subset \mathbb{F}^m$ são espaços vetoriais. O que significa dizer que f é uma função linear?

Q16 Seja $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ uma função linear.

(i) Descreva a matriz M tal que

$$f(\mathbf{v}) = M\mathbf{v} \quad (7)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$.

(ii) Prove que sua matriz M é tal que (7) de fato vale para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$.

(iii) Suponha que uma matriz N é tal que $f(\mathbf{v}) = N\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$. Prove que $M = N$.

Q17 Sejam A uma matriz p por q e B uma matriz q por r com entradas em \mathbb{F} .

(i) Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^r$. Prove usando a definição de produto de matrizes que $A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v}$.

(ii) Lembre que a matriz A define uma função linear $f_A: \mathbb{F}^q \rightarrow \mathbb{F}^p$ tal que $f_A(\mathbf{w}) = A\mathbf{w}$ para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^q$. Da mesma forma, B define uma função linear $f_B: \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^q$ e AB define uma função linear $f_{AB}: \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^p$. Prove que $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

Q18 Seja $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz $n \times n$ triangular superior, isto é, tal que $m_{ij} = 0$ se $1 \leq j < i \leq n$.

- (i) Suponha que $m_{ii} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Prove que a função $f_M: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ é inversível.
- (ii) Suponha que $m_{ii} = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$. Prove que a função $f_M: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ não é injetora.
- (iii) Suponha que $m_{ii} = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$. Prove que a função $f_M: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ não é sobrejetora.

Q19 Seja $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz $n \times n$.

- (i) Suponha que $m_{ij} = 0$ se $1 \leq j \leq i \leq n$. Prove que $M^n = 0$.
- (ii) Suponha que $m_{ij} = 0$ se $1 \leq j \leq i \leq n$, exceto quando $i = j = 1$ e $m_{11} = 1$. Prove que $M^m \neq 0$ para qualquer inteiro $m \neq 0$.
- (iii) Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}. \quad (8)$$

Prove que $M^{122} \neq 0$.

Q20 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e $S \subset V$.

- (i) O que significa dizer que S é um conjunto linearmente dependente de vetores?
- (ii) O que significa dizer que S é um conjunto linearmente independente de vetores?

Q21 Considere os algoritmos GROW e SHRINK vistos em sala e suponha que damos como entrada a esses algoritmos um espaço vetorial V sobre \mathbb{F} .

- (i) Suponha que GROW termina com saída S . Prove que S é linearmente independente.
- (ii) Suponha que SHRINK termina com saída S . Prove que S é linearmente independente.

Q22 Sejam dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^n$ linearmente independentes.

- (i) Considere a matriz $M \in \mathbb{F}^{n \times n}$ cujas colunas são os vetores \mathbf{v}_i ($1 \leq i \leq n$):

$$M = [\mathbf{v}_1 \mid \dots \mid \mathbf{v}_n]. \quad (9)$$

Seja $f_M: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ a função dada por $f_M(\mathbf{a}) = M\mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n$. Prove que $f_M^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{0}\}$. Deduza que f_M é injetora.

- (ii) Suponha que $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$ é tal que

$$\mathbf{w} = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (10)$$

e

$$\mathbf{w} = \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i \mathbf{v}_i \quad (11)$$

para ciertos escalares α_i e β_i ($1 \leq i \leq n$). Prove que $\alpha_i = \beta_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.