Duração da prova: 2 horas

1. [3 pontos] Temos usado a notação O em sala regularmente. Lembre que podemos escrever $O(f(n))$ no lugar de qualquer função $g(n)$ para a qual existam $C > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que

$$|g(n)| \leq Cf(n) \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$

(i) É correto dizer que $n \log n = O(n^2)$?

(ii) Suponha que deduzimos que a complexidade de tempo de dois algoritmos A e B são, respectivamente, $O(n \log n)$ e $O(n^2)$, para entradas de tamanho n. É correto dizer que o algoritmo A é pelo menos tão eficiente quanto o algoritmo B para entradas suficientemente grandes? Justifique sua resposta. [*Sugestão*: cuidado!]

(iii) O que é mais informativo: dizer que a complexidade de tempo de um algoritmo é $O\big(n(\log n)^3\big)$ ou dizer que é $O(n^2)$? Justifique sua resposta.

2. [3 pontos] Nesta questão, consideramos dois grafos orientados G_1 e G_2. Fixe dois inteiros $k \geq 2$ e $n \geq 1$. Ambos G_1 e G_2 têm conjunto de vértices $V = [k]^n = [k] \times \cdots \times [k]$, onde $[k] = \{1, \ldots, k\}$. Em G_1, temos um arco de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ para $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ se (a) $x_i \leq y_i$ para todo i e (b) $\sum_i y_i = 1 + \sum_i x_i$, isto é, todas as coordenadas de $\mathbf{y}$ são as mesmas de $\mathbf{x}$ exceto por uma, que é exatamente um maior que a coordenada correspondente de $\mathbf{x}$. Em G_2, temos um arco de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ para $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ se (a) $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ e (b) $x_i \leq y_i$ para todo i.

(i) Desenhe os grafos G_1 e G_2 no caso em que $k = 2$ e $n = 3$. Note que estes grafos têm $2^3 = 8$ vértices. Ademais, eles têm 12 arcos e 19 arcos, respectivamente.

(ii) Em geral, mostre que G_1 tem no máximo nk^n arcos e G_2 tem exatamente

$$\left\{\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right\}^n - k^n = \binom{k+1}{2}^n - k^n \tag{*}$$

arcos. [*Sugestão*: a grosso modo, cada arco $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ em G_2 pode ser codificado como um vetor com n coordenadas, cada coordenada assumindo um dentre $k + \binom{k}{2}$ valores.]

(iii) Mostre que a quantidade em (*) é pelo menos

$$\frac{1}{3}\binom{k+1}{2}^n.$$

(iv) Mostre que G_1 e G_2 têm o mesmo conjunto de ordenações topológicas.

(v) Suponha que o algoritmo Topological-Sort que estudamos em sala demora $N + M$ unidades de tempo para encontrar uma ordenação topológica de um grafo orientado acíclico com N vértices e M arcos. O que podemos dizer sobre o tempo de execução de Topological-Sort(G_1) e Topological-Sort(G_2)? Suponha agora que $k = 2$ e n é grande. Como você pode comparar estes dois tempos de execução? Dê um valor de n para o qual um tempo é pelo menos 10 vezes maior que o outro. Faça o mesmo para 1000.

3. [3 pontos] Faça uma tabela 3×3 com as linhas e colunas indexadas pelas cores branca, cinza e preta. Na entrada (i, j) desta tabela, indique se é possível acontecer de termos um arco de um vértice de cor i para um vértice de cor j em uma execução de DFS(G) para um grafo orientado G. Responda a mesma pergunta para o caso em que G é um grafo não-orientado. *No caso das entradas negativas, justique sua resposta.*

4. [3 pontos] Suponha que (u, v) é um arco de um grafo orientado G e que executamos DFS(G). Por simplicidade, suponha que G não tem laços, isto é, arcos da forma (u, u). Mostre que (u, v) é

(i) um arco da floresta de busca ou um arco longitudinal descendente se e só se $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$,

(ii) um arco longitudinal ascendente se e só se $d[v] < d[u] < f[u] < f[v]$, e

(iii) um arco transversal se e só se $d[v] < f[v] < d[u] < f[u]$.

Ademais, se x e y são vértices quaisquer de G,

(iv) o que podemos dizer sobre a paridade de $f[x] - d[x]$? Justifique.

(v) Podemos ter $d[x] < d[y] < f[x] < f[y]$? Justifique.